

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

**Josip Arland**

Zagreb, 2017.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **NUMERIČKA ANALIZA PROGIBA ZUBA POLIMERNOG ZUPČANIKA**

Mentor:

doc. dr. sc. Krešimir Vučković, dipl. ing.

Student:

Josip Arland

Zagreb, 2017.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru doc.dr.sc Krešimiru Vučkoviću koji je omogućio izradu ovog rada i nesebično podijelio svoje znanje samnom te na taj način doprinio izradi ovog rada. Zahvaljujem se kolegama Ivanu Čularu, Tomislavu Breškom i Robertu Mašoviću koji su na indirektan način pomogli pri izradi ovog diplomskog rada, bilo to od pomoći pri ispitivanjima ili pri razgovoru o samom radu i savjetima vezano uz rad. Najveća zahvala ide mojim roditeljima koji su ovo sve omogućili.

Ovaj rad posvećujem svom bratu, Stjepanu.

Josip Arland



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**



Središnje povjerenstvo za završne i diplomске ispite  
Povjerenstvo za diplomске ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodogradarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur. broj:	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Josip Arland**

Mat. br.: 0035190174

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Numerička analiza progiba zuba polimernog zupčanika**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Numerical Analysis of Polymer Gear Tooth Deflections**

Opis zadatka:

Polimerni zupčanici zbog ekonomski prihvatljive izrade predstavljaju važan segment u prijenosnicima gibanja, a u novije vrijeme se sve više primjenjuju i u prijenosnicima snage. Zbog znatno manjeg modula elastičnosti u odnosu na metalne zupčanike, pored kontrole nosivosti boka i korijena zuba, kod njih je nužno kontrolirati i progib tjemena zuba. Kako bi se omogućio kvalitetan rad zupčanog prijenosnika (primarno kroz smanjenje buke) te produžio radni vijek, prema smjernici VDI 2736:2013 progib tjemena zuba polimernog zupčanika mora biti manji od  $0,07 \cdot m$ , gdje je  $m$  modul.

U radu je primjenom metode konačnih elemenata potrebno provesti analizu progiba tjemena zuba polimernog zupčanika pri prolasku zuba kroz zahvat pri različitom opterećenju okretnim momentom. Usporedo je potrebno provesti analizu naprezanja u korijenu te analizu kontaktnog pritiska na boku zuba. Numeričku analizu potrebno je provesti prvo uz pretpostavku idealno elastičnog, a zatim i hiperelastičnog materijala zupčanika radi usporedbe dobivenih rezultata.

Poznati su sljedeći podaci o zupčanom paru:

- broj zubi manjeg / većeg zupčanika: 23 / 27,
- modul: 4 mm,
- osnovni profil ozubljenja: DIN 3972 II,
- faktor pomaka profila manjeg / većeg zupčanika: 0,0849 / - 0,0849,
- širina zubi obaju zupčanika: 25 mm,
- materijal obaju zupčanika: PA 66,
- razmak osi: 100 mm.

Verifikaciju numeričkog modela provesti usporedbom s eksperimentalnim ili analitičkim rezultatima iz dostupnih literaturnih izvora. Vrijednosti potrebne za proračun i odabir pojedinih komponenti usvojiti iz postojećih rješenja sličnih uređaja, iskustvenih vrijednosti te u dogovoru s mentorom.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

Rok predaje rada:

Predviđeni datum obrane:

11. svibnja 2017.


13. srpnja 2017.

19., 20. i 21. srpnja 2017.

Zadatak zadao:

Predsjednica Povjerenstva:

  
Doc. dr. sc. Krešimir Vučković

  
Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

## SADRŽAJ

POPIS SLIKA .....	II
POPIS TABLICA.....	IV
POPIS OZNAKA .....	V
SAŽETAK.....	VII
SUMMARY .....	VIII
1.1. Zupčanici.....	1
1.2. Polimerni zupčanici.....	4
1.3. Poliamid 66 .....	5
1.4. Metoda konačnih elemenata.....	7
2. NUMERIČKA ANALIZA .....	8
2.1. Analiza jednostrukog zahvata koncentriranom silom .....	9
2.1.1. <i>Konvergencya rješenja</i> .....	11
2.1.2. Usporedba deformacija hiperelastičnog i linearno elastičnog modela.....	13
2.2. Simulacija prolaska zuba kroz zahvat .....	15
2.2.1 <i>Simulacija prolaska zuba kroz zahvat bez trenja</i> .....	15
2.2.2. <i>Simulacija prolaska zuba kroz zahvat uz utjecaj trenja</i> .....	26
3. ANALITIČKI PRORAČUN .....	32
3.1 Proračun zupčanika smjernicom VDI 2736 .....	32
3.1.1 <i>Proračun naprezanja u korijenu zuba</i> .....	32
3.1.2 <i>Proračun opterećenja boka zuba</i> .....	34
3.1.3 <i>Proračun progiba vrha zuba</i> .....	35
4. ISPITIVANJE .....	36
4.1. Digitalna korelacija slike.....	36
4.2. Ispitivanje zupčanika.....	36
5. USPOREDBA REZULTATA.....	44
6. ZAKLJUČAK .....	48
LITERATURA.....	49
PRILOZI.....	51

## POPIS SLIKA

Slika 1. Shematski prikaz zupčanika.....	1
Slika 2. Rad stroja .....	2
Slika 3. Sile na zubu zupčanika.....	2
Slika 4. Teoretski put zahvata zupčanika .....	3
Slika 5. Kontaktna naprezanja dvaju valjaka .....	3
Slika 6. Primjeri loma zuba: a) lom korijena; b) lom boka .....	4
Slika 7. Polimerni zupčanci.....	4
Slika 8. PA 6.....	5
Slika 9. Dijagram naprezanja PA 66 .....	6
Slika 10. Geometrija pogonskog zupčanika .....	8
Slika 11. Diskretizacija pogonskog zupčanika uslijed koncentrirane sile .....	10
Slika 12. Diskretizacija kritičnog mjesta uslijed koncentrirane sile .....	10
Slika 13. Rubni uvjeti zupčanika uslijed djelovanja koncentrirane sile.....	11
Slika 14. Konačni elementi: a) CPS4; b) CPS8; c) CPS4R; d) CPS8R; e) CPS3; f) CPS6M .	12
Slika 15. Točka najvećeg naprezanja u korijenu zuba .....	12
Slika 16. Konvergencija rješenja uslijed djelovanja koncentrirane sile.....	13
Slika 17. Usporedba dijagrama naprezanja .....	14
Slika 18. Usporedba rasta deformacije uslijed povećanja momenta torzije.....	14
Slika 19. Rubni uvjeti zahvata zubiju zupčanika uslijed rotacije: a) rubni uvjeti pomaka; b) kontakt i referentna točka .....	16
Slika 20. Diskretizacija zupčanika .....	17
Slika 21. Detalj diskretizacije: a) zubi; b) zub .....	17
Slika 22. Naprezanje u jednostrukom zahvatu .....	18
Slika 23. Ciklus naprezanja pogonskog zupčanika pri 20 Nm.....	18
Slika 24. Ekvivalentna naprezanja boka zuba tokom jednog ciklusa pri 20 Nm prema Von Misesu .....	19
Slika 25. Ekvivalentna naprezanja prema Von Misesu u jednom čvoru boka zuba .....	20
Slika 26. Raspodjela normalne sile po boku zuba.....	20
Slika 27. Raspodjela progiba u jednom ciklusu naprezanja zuba .....	21
Slika 28. Utjecaj modula elastičnosti na savijanje zuba zupčanika .....	22
Slika 29. Puta zahvata u ovisnosti o materijalu.....	22
Slika 30. Put zahvata zupčanog para materijala PA 66 pri 20 Nm .....	22
Slika 31. Ne evolventni kontakt: a) skok naprezanja prilikom ulaska u dvostruki zahvat; b) detalj skoka naprezanja .....	23
Slika 32. Ciklus naprezanja zuba pogonskog zupčanika sa različitim opterećenjima .....	24
Slika 33. Usporedba porasta naprezanja ovisno o momentu.....	24
Slika 34. Promjena položaja točke najvećeg glavnog naprezanja.....	25
Slika 35. Usporedba porasta progiba ovisno o momentu .....	26
Slika 36. Ciklus naprezanja zuba pogonskog zupčanika uz utjecaj trenja .....	27
Slika 37. Sila trenja između A' i C' točke zahvata.....	27
Slika 38. Sila trenja između C i E' točke zahvata .....	28
Slika 39. Promjena smjera sile trenja kroz zahvat .....	28
Slika 40. Ciklus naprezanja zuba pogonskog zupčanika s utjecajem trenja s različitim opterećenjima .....	29
Slika 41. Usporedba najvećih glavnih naprezanja analiza sa i bez trenja .....	30

Slika 42. Usporedba progiba analiza sa i bez trenja.....	30
Slika 43. Pozicija zupčanika pri najvećem glavnom naprezanju uslijed opterećenja od 40 Nm analize sa trenjem .....	31
Slika 44. Princip rada digitalne obrade slike.....	36
Slika 45. Sustav za ispitivanje.....	37
Slika 46. Shema ispitnog postolja .....	37
Slika 47. Slikanje zupčanika .....	38
Slika 48. Ambro-Sol sprej.....	38
Slika 49. Priprema zupčanika.....	39
Slika 50. Površina promatranog zuba pogonskog zupčanika .....	40
Slika 51. Kvaliteta uzorka površine promatranog zuba pogonskog zupčanika.....	40
Slika 52. Referentna površina .....	41
Slika 53. Rezultati ispitivanja: a) $T = 6,84$ Nm; b) $T = 12,92$ Nm; c) $T = 18,97$ Nm; d) $T =$ 25,04 Nm; e) $T = 31,24$ Nm .....	42
Slika 54. Očitanje progiba simulacije prolaska zuba zupčanika kroz zahvat bez trenja.....	44
Slika 55. Usporedba maksimalnih progiba provedenih analiza .....	45
Slika 56. Usporedba naprezanja provedenih analiza.....	46

**POPIS TABLICA**

Tablica 1. Mehanička svojstva PA 66 .....	6
Tablica 2. Geometrija pogonskog i gonjenog zupčanika .....	9
Tablica 3. Kut ulaska u jednostruki zahvat i vrijeme najvećeg glavnog naprezanja .....	29
Tablica 4. Rezultati ispitivanja pogonskog zupčanika .....	43
Tablica 5. Usporedba progiba ispitivanja i simulacije bez trenja .....	44
Tablica 6. Usporedba najvećih glavnih naprezanja u korijenu zuba provedenih analiza .....	47
Tablica 7. Usporedba rezultata simulacije prolaska zuba kroz zahvat bez trenja i VDI 2736.	47



## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$b, b_w$	mm	Debljina zupčanika
$d_1, d_2$	mm	Diobeni promjer zupčanika
$d_a$	mm	Tjemeni promjer
$d_b$	mm	Temeljni promjer
$d_e$	mm	Promjer kružnice određen vanjskom točkom jednostrukog zahvata
$d_w$	mm	Promjer kinematske kružnice zahvata
$E, E_1, E_2$	MPa	Modul elastičnosti
$F_{bt}$	N	Tangencijalna sila
$F_{bn}$	N	Normalna sila na bok zuba
$h_a$	mm	Tjemena visina zuba zupčanika
$h_f$	mm	Podnožna visina zuba zupčanika
$K_F$	-	Faktor raspodjele opterećenja
$K_A$	-	Faktor primjene
$m$	mm	Modul zupčanika
$p$	mm	Korak
$p_e$	mm	Osnovni korak profila
$p_{fP}$	mm	Radijus zaobljenja podnožja profila ozubnice
$T$	N	Moment torzije
$u$	mm	Omjer broja zubi
$u_1, u_2$	mm	Pomaci u x i y smjeru
$u_{R3}$	rad	Kut rotacije oko z osi
$x$	-	Pomak profila
$Y_{Fa}$	-	Faktor oblika
$Y_{Sa}$	-	Faktor zareznog djelovanja
$Y_\varepsilon$	-	Faktor učešća opterećenja

$Y_{\beta}$	-	Faktor raspodjele opterećenja po širini zuba
$z_1, z_2$	-	Broj zubi zupčanika
$Z_E$	-	Faktor elastičnosti
$Z_H$	-	Faktor oblika zuba
$Z_{\varepsilon}$	-	Faktor prekrivanja
$Z_{\beta}$	-	Faktor raspodjele opterećenja po širini zuba
$\alpha$	°	Kut nagiba profila ozubnice
$\alpha_{Fe}$	°	Kut djelovanja normalne sile u vanjskoj točki jednostrukog zahvata u odnosu na okomicu na simetralu zuba
$\alpha_w$	°	Pogonski kut zahvata
$\varepsilon$	-	Deformacija
$\varepsilon_a$	-	Stupanj prekrivanja
$\lambda$	mm	Progib vrha zuba
$\lambda_{max}$	mm	Maksimalni progib vrha zuba
$\lambda_{dop}$	mm	Dopušteni progib vrha zuba u tangencijalnom smjeru
$\sigma$	MPa	Naprezanje
$\sigma_{ekv}$	MPa	Ekvivalentno naprezanje prema Von Misesu
$\sigma_F$	MPa	Glavno naprezanje u smjeru tangente u promatranom čvoru na prijelaznoj krivulji
$\sigma_{F,max}$	MPa	Maksimalno glavno naprezanje u smjeru tangente u promatranom čvoru na prijelaznoj krivulji
$\sigma_H$	MPa	Kontaktno naprezanje
$\varphi$	°	Kut zakreta zupčanika

## **SAŽETAK**

U ovom radu proučava se utjecaj različitih vrsta modela na rezultate numeričke analize. Predmet analize je zupčani par izrađen od materijala PA 66. Promatra se utjecaj rasta opterećenja na najveća glavna naprezanja, kontaktna naprezanja na boku zuba i progib vrha zuba. Analize se provode u linearno elastičnom i hiperelastičnom području. Također, provodi se laboratorijsko ispitivanje zupčanog para i vrši se analiza progiba zuba pogonskog zupčanika digitalnom korelacijom slike. Nakon provođenja ispitivanja uspoređeni su rezultati s numeričkim analizama radi verifikacije predloženih numeričkih modela. Nakon verifikacije izvršena je usporedba rezultata numeričkih analiza sa smjernicom VDI 2736.

Ključne riječi: numerička analiza, zupčanici, hiperelastičnost, polimeri, digitalna korelacija slike

## **SUMMARY**

In this paper goal is to study the impact of different types of models on the results of numerical analysis. The subject of the analysis are spur gears made of PA 66. The impact of load increase on tooth root stress, contact stress on tooth flank and tooth tip deflection will be observed. The analyzes are performed in a linear elastic and hyper elastic field. Experiment is also performed and the tooth tip deflection is obtained via digital image correlating principle. After the tests are performed, the results are compared with numerical analyzes to verify the proposed numerical models. After verification, comparisons of the results of numerical analysis with the VDI 2736 were performed.

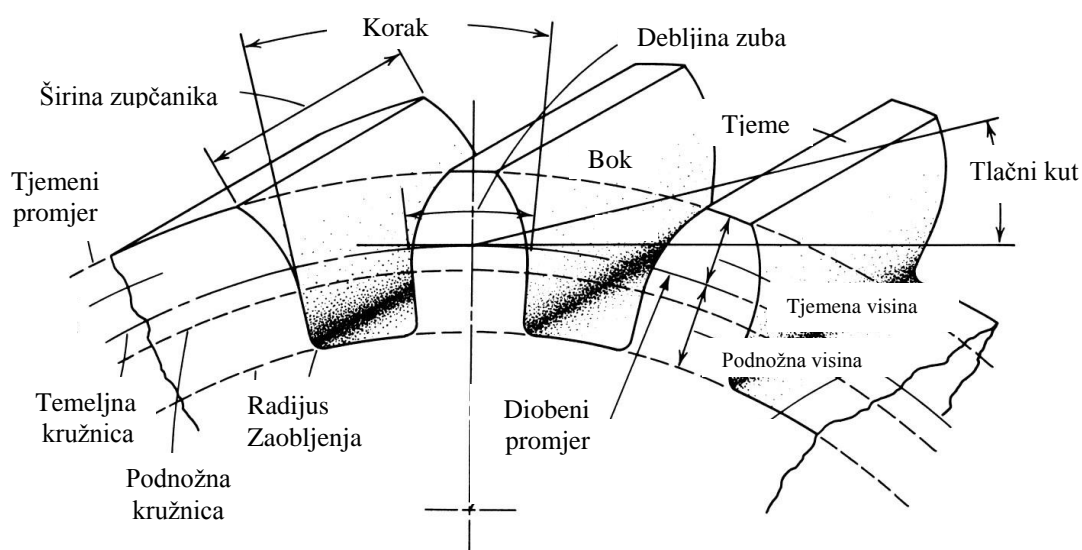
Key words: numerical analysis, spur gears, hyperelasticity, polymers, digital image correlation

## 1. UVOD

Razvoj znanosti i tehnologije u inženjerstvu rezultira time da su se prijenosnici gibanja i snage počeli proizvoditi od različitih vrsta materijala. U ovom radu je kao takav jedan prijenosnik snage uzet zupčani prijenosnik s dva čelnika napravljena od polimera poliamida 66 (PA 66). Polimeri zbog svoje gustoće koja je višestruko manja od čelika našli su svoju primjenu i mogućnost implementacije u zupčanim prijenosnicima [1]. Razvojem tehnologije razvile su se i nove metode proračunavanja strojnih dijelova i dijelova konstrukcija, stoga se zupčani prijenosnik proračunava metodom konačnih elemenata [2] te se uspoređuje sa smjernicom VDI 2736 [13] za polimerne zupčanike kao i provedenim ispitivanjem. Ispitivanjem se želi verificirati predloženi numerički model.

### 1.1. Zupčanici

Zupčanici su strojni elementi koji služe za prijenos snage i gibanja. Koriste se u raznim industrijama, najviše u automobilskoj. Primjena zupčanika širi se i na zrakoplovnu industriju, građevinske strojeve, poljoprivredne strojeve, uredsku opremu, satove itd. Godišnje se proizvodi ogroman broj zupčanika, stoga je vrlo bitno precizno konstruirati zupčanic i optimirati ga za uvjete rada kako bi se smanjili troškovi. Na slici 1 shematski je prikazan je zupčanic i popisani su dijelovi bitni za njegovo proračunavanje.



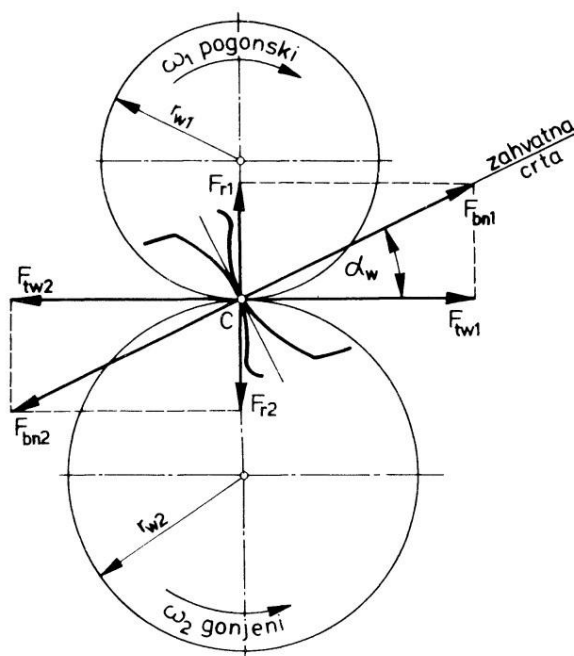
Slika 1. Shematski prikaz zupčanika [18]

Dva zupčanika u zahvatu tvore zupčani par te se snaga prenosi oblikom. Pogonski zupčanik se rotira uslijed narinutog opterećenja pogonskog stroja te prenosi snagu na gonjeni zupčanik preko zubiju u zahvatu. Nakon toga, gonjeni zupčanik predaje snagu radnom stroju. Jedan općeniti način rada stroja prikazan je na slici 2.



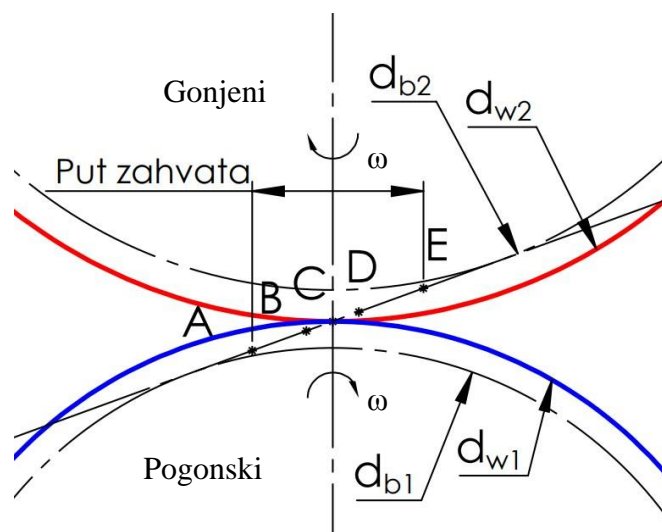
Slika 2. Rad stroja

Zupčani par je mehanički tip prijenosnika. Uslijed prijenosa snage s pogonskog na gonjeni zupčanik javljaju se sile na zub prikazane na slici 3.



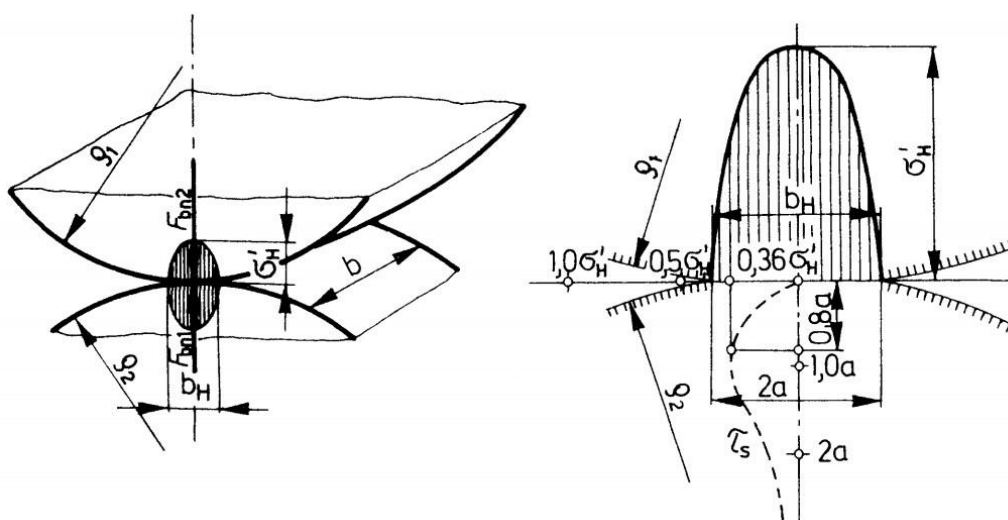
Slika 3. Sile na zubu zupčanika [3]

Sila  $F_{bn1}$  je normalna sila koja djeluje na bok zuba pogonskog zupčanika kao posljedica prenošenja snage. Zupčanici su rotirajući dijelovi što znači da se mijenjaju zubi u zahvatu. Jedan zub tijekom jednog okretaja zupčanika samo jednom prođe kroz zahvat. Jedan okret zupčanika predstavlja jedan ciklus naprezanja zuba zupčanika. Put zahvata prikazan je na slici 4. Pojam ciklus naprezanja zupčanika u ovom radu označavat će prolazak prethodnog, promatranog i nadolazećeg zuba kroz zahvat.



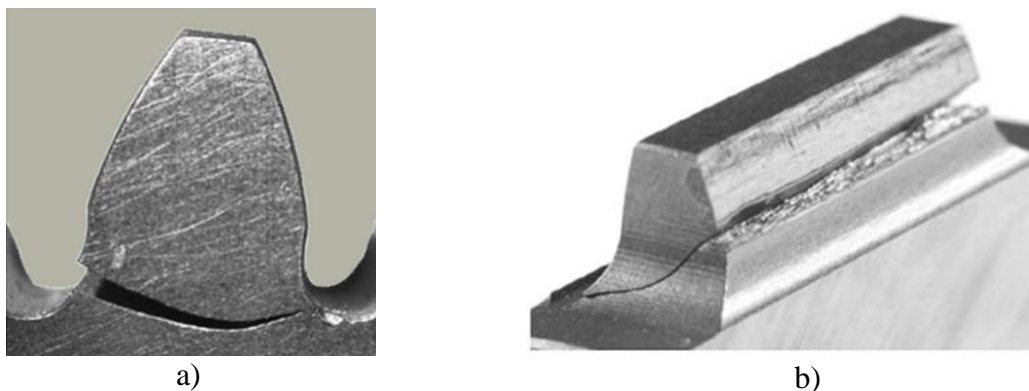
Slika 4. Teoretski put zahvata zupčanika

Točka A predstavlja početak zahvata. Između točke A i točke B zub se nalazi u dvostrukom zahvatu. Dvostruki zahvat znači da se snaga prenosi preko dva para zubi. U točki B počinje jednostruki zahvat. U jednostrukom zahvatu javljaju se najveća naprezanja jer se snaga prenosi samo pomoću jednog para zubi. Točka C je kinematski pol. Točka D je vršna točka jednostrukog zahvata nakon koje zub ponovno ulazi u dvostruki zahvat. Točka E predstavlja kraj zahvata. Zupčanik se proračunava s obzirom na naprezanja boka i u korijenu zuba. U korijenu zuba se javljaju naprezanja koja ako dostignu kritičnu vrijednost uzrokuju nastanak pukotina ili puknuće zuba. Na boku zuba uslijed prenošenja snage javljaju se kontaktna (Hertzova) naprezanja. Slika 5 prikazuje raspodjelu kontaktnih naprezanja na boku zuba.



Slika 5. Kontaktna naprezanja dvaju valjaka [3]

Ako dva valjka naliježu jedan na drugog i međusobno se tlače silom  $F_{bn}$  javljaju se kontaktne naprezanja u obliku elipse. Kontaktno naprezanje ovisi i o srednjem polumjeru zakrivljenja valjka, a to je oblik ozubljenja. Primjer loma zuba zbog naprezanja u korijenu i oštećenja boka uslijed prevelikog kontaktnog naprezanja prikazan je na slici 6.



Slika 6. Primjeri loma zuba: a) lom korijena; b) lom boka [19]

## 1.2. Polimerni zupčanici

Upotreba polimernih zupčanika se ubrzano povećava zbog prednosti koje imaju nad metalnim zupčanicima. Serijska proizvodnja je jeftinija, moguć je prijenos snage bez podmazivanja. Polimerni zupčanici pokazuju dobra svojstva samopodmazivanja i smanjenog trošenja što ih čini poželjnima u uvjetima gdje je podmazivanje otežano ili nepoželjno. Buka koju proizvode tijekom eksploatacije je manja i imaju dobru otpornost na vibracije. Više vrsta polimera se koristi pri izradi zupčanika. Također, koriste se punila u obliku staklenih i karbonskih vlakana koji poboljšavaju mehanička svojstva materijala te tako polimerne zupčanike čine još boljima.



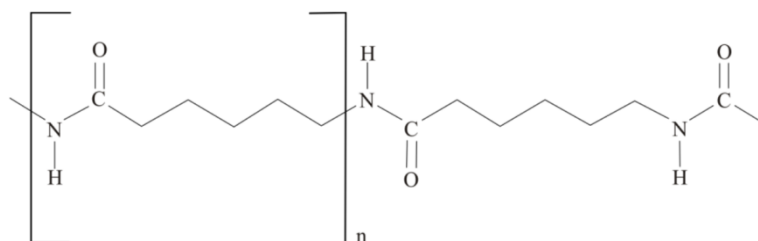
Slika 7. Polimerni zupčanici [20]



Trenutna primjena polimernih zupčanika je u svrhu prijenosa gibanja. Primjenu su već našli u preciznim instrumentima, uredskim primjenama, mehatroničkim uređajima, u računalima i laboratorijskoj opremi. Međutim, svrha ovog rada je da se izanaliziraju polimerni zupčanici u svrhu prijenosa snage. S obzirom na to da nema puno podataka i područje je nedovoljno istraženo, ovim radom će se pokušati pokazati kako polimerni zupčanici reagiraju pri većim opterećenjima. Smjernica VDI 2736 piše o tome da se prilikom proračunavanja polimernih zupčanika mora posebno obratiti pozornost na maksimalan progib vrha zuba. Progib vrha zuba je značajniji što je modul elastičnosti manji. Modul elastičnosti materijala poliamida 66 (PA 66) koji se koristi u ovom radu je oko 67 puta manji od modula elastičnosti čelika.

### 1.3. Poliamid 66

Poliamid 66 spada u skupinu konstrukcijskih plastomera te je čest materijal za izradu polimernih zupčanika i drugih konstrukcijskih elemenata. Sintetiziran je polikondenzacijom hexametilendiamina i adipinske kiseline. Nastaje otopina najlonske soli koja se taloži, a zatim se pri povišenom tlaku zagrijavanjem na oko 200 °C pretvara u polimer [21]. Za poliamide je karakteristična amidna skupina -CO-NH-. Ponavljanjem amidne skupine dolazi do stvaranja kristalne strukture s visokom međumolekularnom privlačnosti. Postoje više vrsta poliamida: PA 6, PA 11, PA 12, PA 66, PA 610, PA 46 itd.



Slika 8. PA 6 [15]

PA 66 pokazuje dobra mehanička svojstva pri povišenim temperaturama te je to jedan od najkorištenijih materijala pri izradi zupčanika. U ovom radu koristio se PA 66 bez ikakvih dodataka. Mehanička svojstva PA 66 prikazana su u tablici 1 [7].

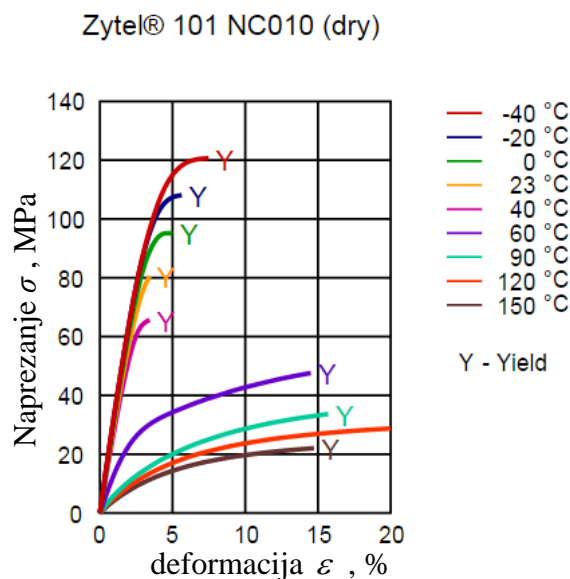
Tablica 1. Mehanička svojstva PA 66

	Vrijednost	Jedinica	Ispitna metoda
Modul elastičnosti	3100	MPa	DIN EN ISO 527-2
Vlačna čvrstoća	84	MPa	DIN EN ISO 527-2
Granica razvlačenja	82	MPa	DIN EN ISO 527-2
Produljenje kod granice razvlačenja	4,5	%	DIN EN ISO 527-2
Produljenje kod loma	25	%	DIN EN ISO 527-2
Savojna čvrstoća	114	MPa	DIN EN ISO 178
Tlačna čvrstoća	20/38	MPa	EN ISO 604
Tlačni modul	2700	MPa	EN ISO 604
Udarni rad loma	-	$\text{kJ/m}^2$	DIN EN ISO 179-1eU
Udarni rad loma sa zarezanim djelovanjem	5	$\text{kJ/m}^2$	DIN EN ISO 179-1eA

PA 66 pokazuje gumoliko ponašanje materijala. Kako bi se što bolje opisao PA 66 koristi se model hiperelastičnog ponašanja materijala. Hiperelastičnost se primjenjuje kod materijala koji se ponašaju elastično pri velikim deformacijama. Takvi materijali su izotropni i nelinearno elastični. Konstitutivni zakon za izotropne hiperelastične materijale se definira jednadžbom

$$W(F) = U(I_1, I_2, I_3), \quad (1.1)$$

gdje je  $W$  gustoća energije deformiranja, a  $I_1, I_2, I_3$  su tenzori deformacija. Ovisnost naprezanja o deformacijama i obrnuto nalazi se preko gustoće energije deformiranja [6]. Slika 9 prikazuje odnos između naprezanja i deformacija.



Slika 9. Dijagram naprezanja PA 66

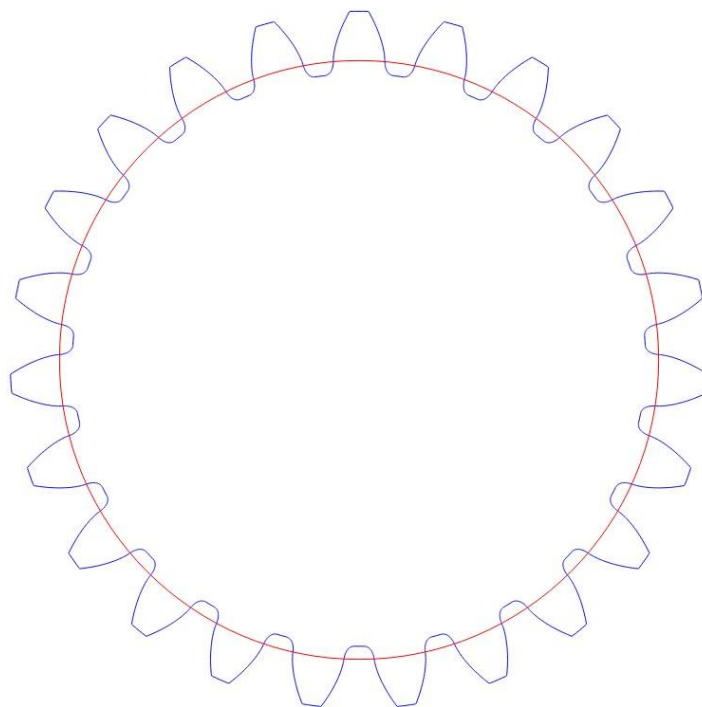
Upravo se zbog tog gumolikog ponašanja kod polimernih zupčanika mora kontrolirati maksimalni progib vrha zuba kao što napominje smjernica VDI 2736.

#### **1.4. Metoda konačnih elemenata**

Za numeričke analize služi se programom *Abaqus*. Metoda kojom se provodi analiza je metoda konačnih elemenata. Metoda konačnih elemenata se počela razvijati u 20. stoljeću s pojavom računala. To je približna metoda kojom se s povećavanjem elemenata i/ili stupnjem polinoma konvergira točnom, analitičkom rješenju. Analitičko rješenje s obzirom na složenost konstrukcije ili geometriju tijela može biti teško opisivo, čak i nemoguće za riješiti. Stoga se koristi metoda konačnih elemenata. U suštini metoda konačnih elemenata zamjenjuje kontinuirane funkcije ponašanja tijela koje bi dale točno analitičko rješenje s aproksimiranim funkcijama, polinomima. Konstrukcija ili tijelo diskretizira se na više manjih dijelova te se tako opisuje ponašanje tijela. Na taj način se izbjegava rješavanje diferencijalnih jednadžbi koje za kompliciraniju konstrukciju mogu biti nemoguće za riješiti.

## 2. NUMERIČKA ANALIZA

Tijekom analize promatra se samo pogonski zupčanik. Sve vrijednosti dobivene u ovom poglavlju vrijede samo za pogonski zupčanik. Analiza se odvija uz pretpostavku hiperelastičnog ponašanja materijala sa svojstvima prema slici 9. U prvoj analizi simulira se dodir zubi zupčanika koncentriranom silom. Koncentrirana sila predstavlja opterećenje koje pogonski zupčanik prenosi na gonjeni. Mjesto na kojem djeluje sila je u točki kraja jednostrukog zahvata. Odabir konačnih elemenata i konvergencija rješenja analizira se koncentriranom silom zbog jednostavnosti i brzine izvršenja analize. Rješenja koja daje analiza sa silom su dovoljno točna da se mogu odabrati prikladni konačni elementi za daljnje analize. Promjer na kojem djeluje sila i kut djelovanja sile iščitani su iz programa *Kisssoft* [9] koji je služio za izradu geometrije zupčanika. Generirana geometrija zupčanika prikazana je na slici 10.



**Slika 10. Geometrija pogonskog zupčanika**

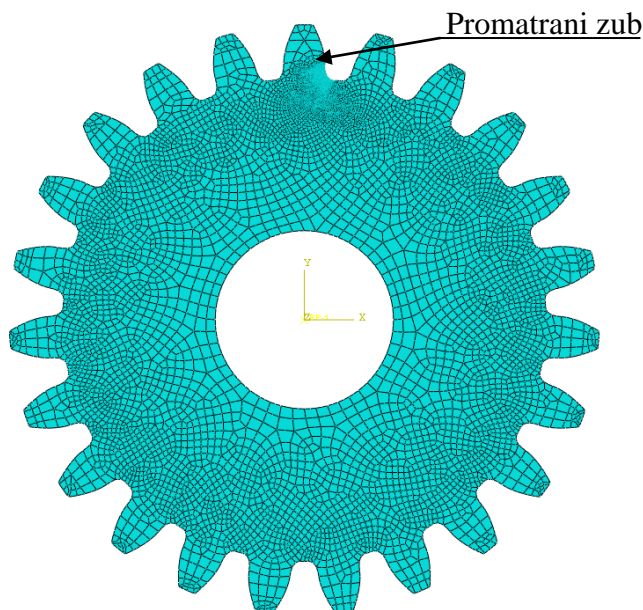
Podaci o zupčanicima dani su u tablici 2.

**Tablica 2. Geometrija pogonskog i gonjenog zupčanika**

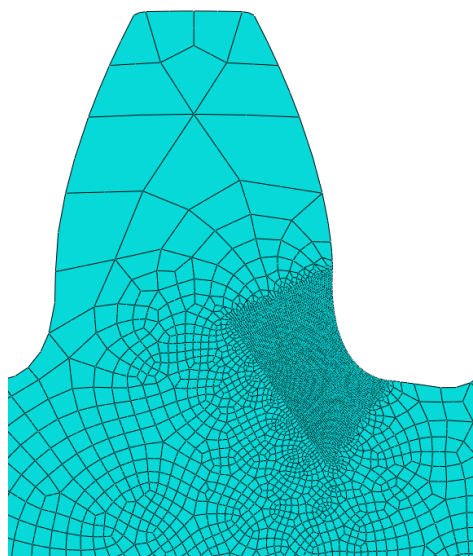
Ozubljenje Zupčanik	Vanjsko evolventno s ravnim zubima	
	Pogonski	Gonjeni
Kut nagiba boka osnovnog profila ozubljenja $\alpha$	20°	20°
Modul $m$	4 mm	4 mm
Faktor pomaka profila $x$	0,0849	-0,0849
Tjemena visina osnovnog profila ozubljenja $h_a$	4 mm	4 mm
Podnožna visina osnovnog profila ozubljenja $h_f$	5 mm	5 mm
Polumjer zaobljenja podnožja osnovnog profila ozubljenja $p_{fp}$	0,8 mm	0,8 mm
Promjer tjemene kružnice $d_a$	100,679 mm	115,321 mm
Broj zubi $z$	23	27
Širina zupčanika $b$	25 mm	25 mm
Materijal zupčanika	PA 66	PA 66

## 2.1. Analiza jednostrukog zahvata koncentriranom silom

S obzirom na to da se uvjeti dodira ne mijenjaju po širini zupčanika, provedena je dvodimenzijaska analiza. Svojstvo materijala je u jednoj analizi linearno elastičnog tipa, a u drugoj hiperelastičnog. Materijal je definiran kao hiperelastičan izvlačenjem točaka poznatog dijagrama sa slike 9 i ubacivanjem u *Abaqus* pod opcijom *Hyperelastic, Uniaxial Test Data*. Postoji više različitih modela koji se mogu koristiti u *Abaqusu*: Arruda-Boyce model, Marlow, Mooney-Rivlin, neo-Hookean, Ogden model, polinomni oblik, reducirani polinomni oblik, Yeoh model i Van der Waals model. Kada je dostupan samo jedan set podataka eksperimentalnog ispitivanja preporuča se koristiti Marlowov model [10]. Slika 2 pruža jedan set podataka jednoosnog ispitivanja gdje se radi samo vlačno ispitivanje. Iz preporuka navedenih u [10] i [11] uzima se Marlowov model koji opisuje materijal. Nakon provedene konvergencije rješenja na hiperelastičnom modelu usporedit će se utjecaj postavki materijala na rezultate. Diskretizacija je provedena tako da se samo kritično mjesto, mjesto proučavanja strukturno diskretizira dok je ostatak diskretiziran proizvoljno. Slika 11 prikazuje diskretizaciju pogonskog zupčanika. Slika 12 prikazuje diskretizirano kritično mjesto zuba, mjesto proučavanja.

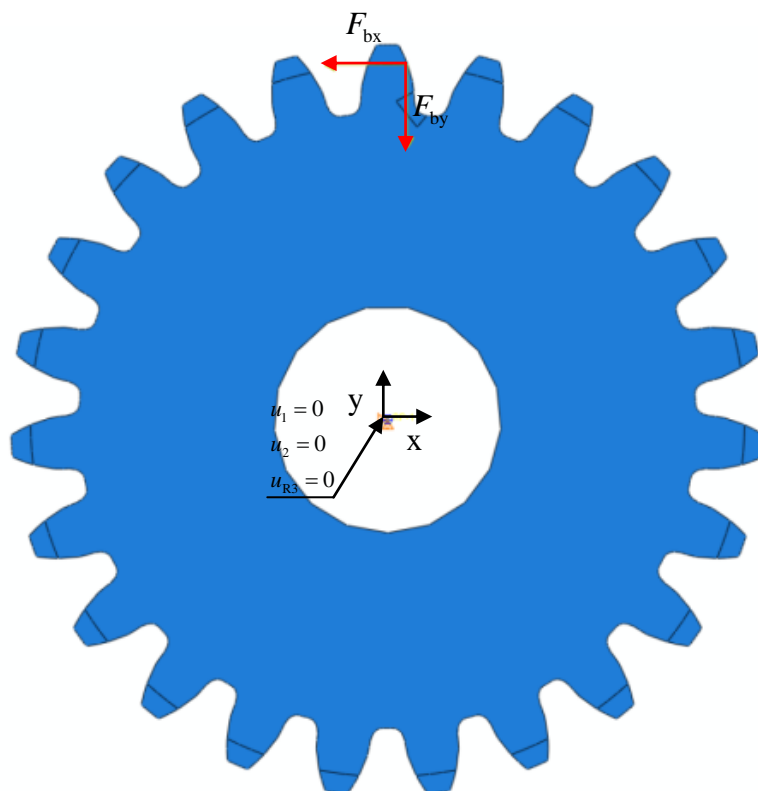


**Slika 11. Diskretizacija pogonskog zupčanika  
uslijed koncentrirane sile**



**Slika 12. Diskretizacija kritičnog mjesta  
uslijed koncentrirane sile**

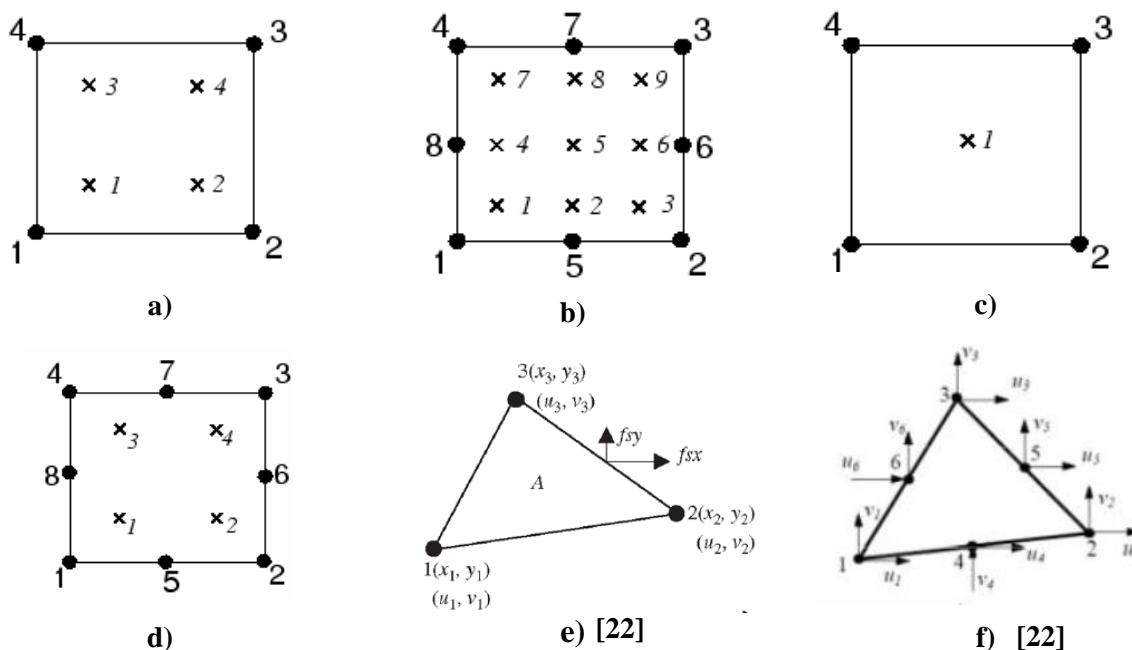
Na slici 12 se vidi da je samo korijen zuba diskretiziran. Diskretizacija je provedena tako da se napravi particija naziva *Partition* oko korijena zuba. Unutar promatranog dijela sa slike 12 provela se strukturna diskretizacija. Rubni uvjeti zadani su na način da je u središte zupčanika stavljena referenta točka *RP*. Točka je povezana s unutrašnjim rubom zupčanika opcijom *Kinematic Coupling*. Rubni uvjeti pomaka i rotacije stavljeni su na referentnu točku. I pomaci i rotacija su onemogućeni. Promjer na kojem djeluje sila je  $d_e = 94,167 \text{ mm}$ , a kut djelovanja sile na promjeru  $d_e$  je  $\alpha_{Fe} = 20,10^\circ$ . Sila iznosa  $F_{bn} = 2544,8 \text{ N}$  djeluje na promjeru  $d_e$  što je ekvivalentno djelovanju momenta torzije od  $T = 110 \text{ Nm}$ . Rastavljanjem sile  $F_{bn}$  na komponente dobiju se vrijednosti  $F_{bx} = -2390 \text{ N}$  i  $F_{by} = -874,6 \text{ N}$ . Negativne vrijednosti predstavljaju smjer djelovanja sile. Slika 13 prikazuje rubne uvjete i opterećenje pogonskog zupčanika.



**Slika 13. Rubni uvjeti zupčanika uslijed djelovanja koncentrirane sile**

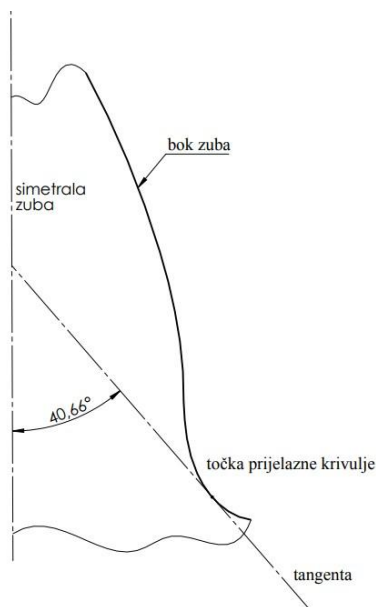
#### 2.1.1. Konvergencija rješenja

Konvergencija rješenja je provedena na način da su se mijenjali elementi prikladni za ovu vrstu analize i povećavali brojevi elemenata u kritičnoj zoni. Na taj način se odabiru prikladni elementi i broj elemenata potrebni za dobivanje rezultata koji daju dovoljno dobro rješenje. Korišteni konačni elementi su: *CPS4*, *CPS4R*, *CPS8*, *CPS8R*, *CPS3* i *CPS6M* [10]. To su *Plane Stress* elementi u kojima vlada ravninsko stanje naprezanja. Naprezanje u normalnom smjeru na bočnu plohu zupčanika je jednako nuli. *CPS4* su pravokutni konačni elementi prvog reda. *CPS4R* su pravokutni konačni elementi prvog reda s reduciranom integracijom. *CPS8* su pravokutni konačni elementi drugog reda. *CPS8R* su pravokutni konačni elementi drugog reda s reduciranom integracijom. *CPS3* su trokutni konačni elementi prvog reda. *CPS6M* su modificirani trokutni konačni elementi drugog reda. Na slici 14 prikazani su navedeni konačni elementi.



Slika 14. Konačni elementi: a) CPS4; b) CPS8; c) CPS4R; d) CPS8R; e) CPS3; f) CPS6M

Za očekivati je da će *CPS8* konačni element najbrže konvergirati s obzirom na broj stupnjeva slobode i točke integracije. *CPS3* će najsporije konvergirati jer element može opisivati samo konstantno polje deformacija. Gleda se *Max principal* naprezanje u točki korijena zuba u kojoj je naprezanje najveće. Najveće naprezanje se javlja u točki prijelazne krivulje pod kutem od  $40,66^\circ$  između tangente na prijelaznu krivulju i simetrale zuba.

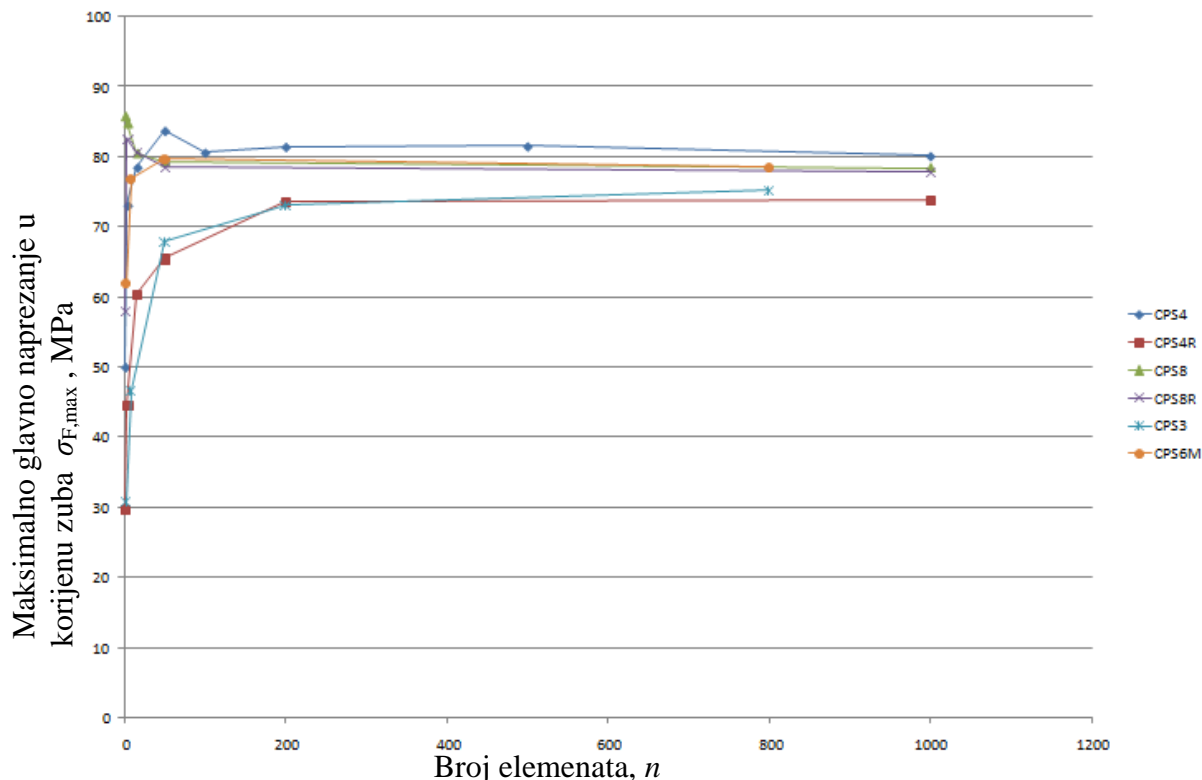


Slika 15. Točka najvećeg napreznja u korijenu zuba

U točki najvećeg napreznja u korijenu zuba, napreznje okomito na tangentu je 0. Tangencijalna napreznja su 0. Napreznje u smjeru normale na bočnu plohu je 0 što je i sama



definicija ravninskog stanja naprezanja. Naprezanje u smjeru tangente u promatranom čvoru na prijelaznu krivulju je glavno naprezanje. Tokom ovog rada za naprezanje u smjeru tangente u promatranom čvoru korijena zuba koristit će se izraz glavnog naprezanja. [23] [24]



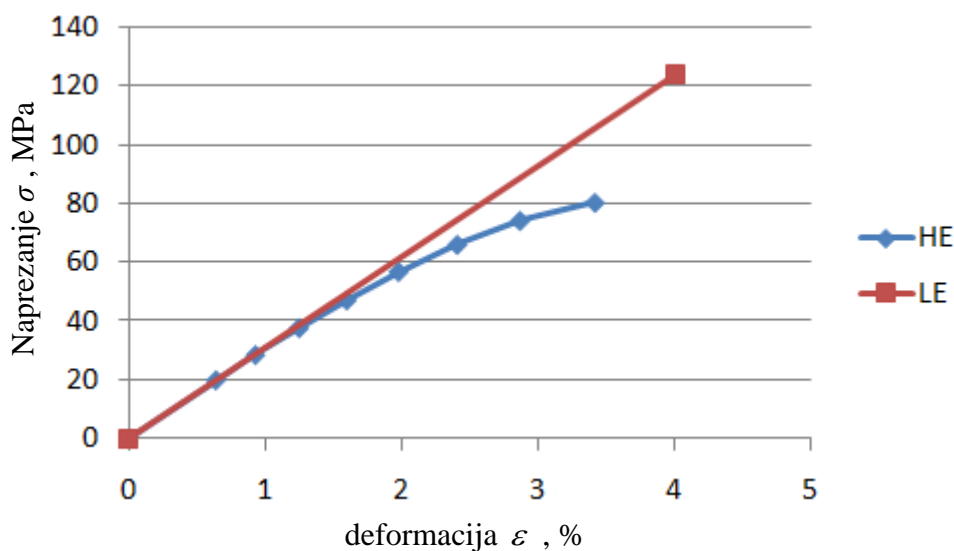
Slika 16. Konvergencija rješenja uslijed djelovanja koncentrirane sile

Iz slike 16 vidljivo je da rješenja s korištenim konačnim elementima *CPS8* i *CPS8R* najbrže konvergiraju, dok *CPS4R* i *CPS3* najsporije konvergiraju. S obzirom da skoro jednako brzo konvergiraju elementi *CPS8* i *CPS8R* koristit će se *CPS8R* konačni elementi jer imaju reduciranu integraciju. Reducirana integracija znači da ima manje točaka integracije, što znači da će se manje memorije računala trošiti i analize brže vrtiti. U daljnjim analizama će se koristiti *CPS8R* konačni elementi. Pokazano je da vrlo brzo konvergiraju i troše manje resursa računala nego *CPS8* konačni elementi.

### 2.1.2. Usporedba deformacija hiperelastičnog i linearno elastičnog modela

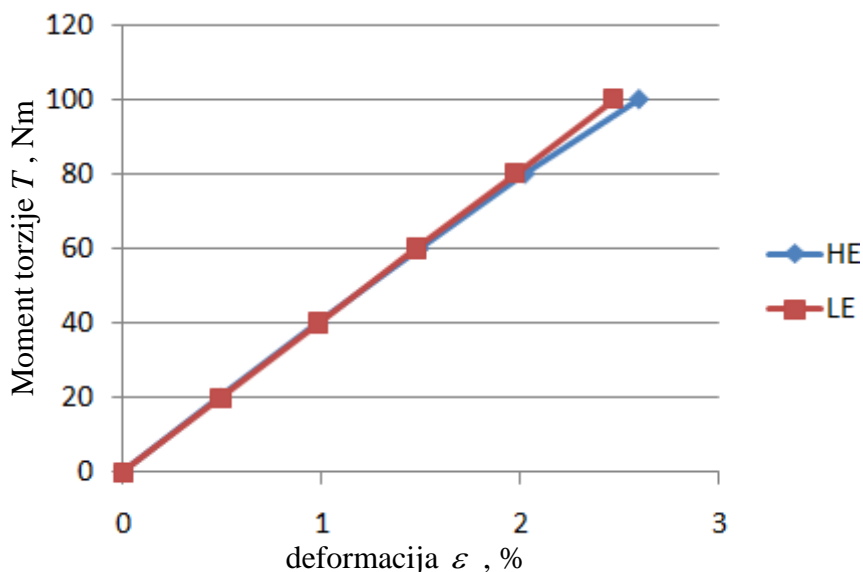
Kako je već rečeno, hiperelastični materijali su izotropni i nelinearno elastični. Ta nelinearna elastičnost pri malim deformacijama može biti dovoljno dobro aproksimirana linearnim modelom što pokazuje slika 17. Na slici 17 se vidi da je vrlo mala razlika između linearno

elastičnog i hiperelastičnog modela. Linearno elastični model ima modul elastičnosti  $E = 3100 \text{ MPa}$ . To dovodi do toga da će deformacije pri malim naprežanjima biti približno jednake. Tek pri većim naprežanjima vidi se značajnija razlika u deformaciji između navedenih modela. HE predstavlja hiperelastično ponašanje materijala, dok LE predstavlja linearno elastično ponašanje materijala.



Slika 17. Usporedba dijagrama naprežanja

Kako linearni model pri malim deformacijama dovoljno dobro opisuje stanje materijala, provodi se usporedba promjene deformacije s povećanjem momenta torzije pogonskog zupčanika za linearno elastični i hiperelastični model. Na slici 18 prikazana je usporedba.



Slika 18. Usporedba rasta deformacije uslijed povećanja momenta torzije

Vidljivo je iz slike kako je pri malim deformacijama razlika vrlo mala. Pri momentu torzije od 40 Nm razlika u deformaciji između elastičnog i hiperelastičnog modela je samo 0,0013%. Pri većim momentima torzije razlika raste. Razlika pri momentu torzije od 100 Nm je 0,125%. Povećanje razlike s povećanjem momenta torzije iskazuje pojavu hiperelastičnosti u samom materijalu, to jest otklon od pravca kao što je linearni model.

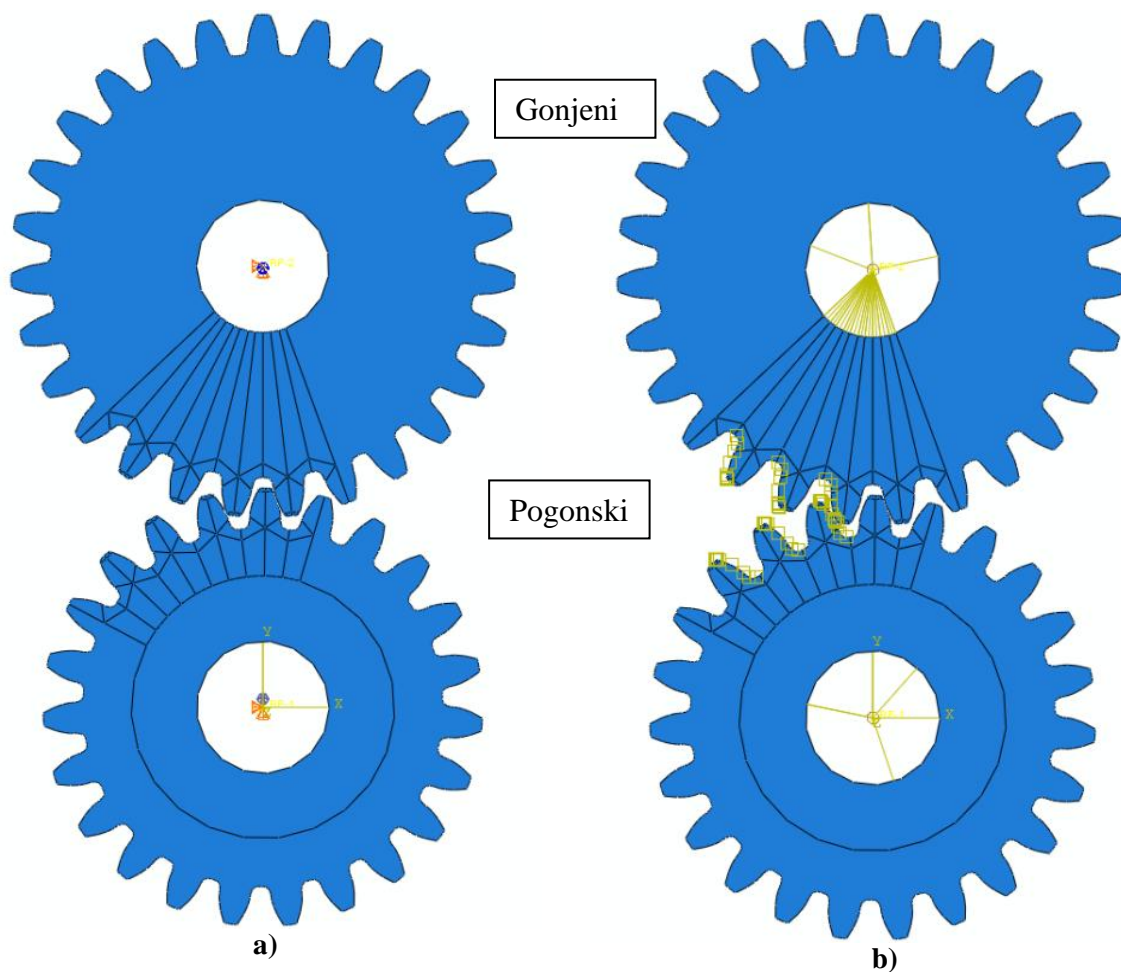
## 2.2. Simulacija prolaska zuba kroz zahvat

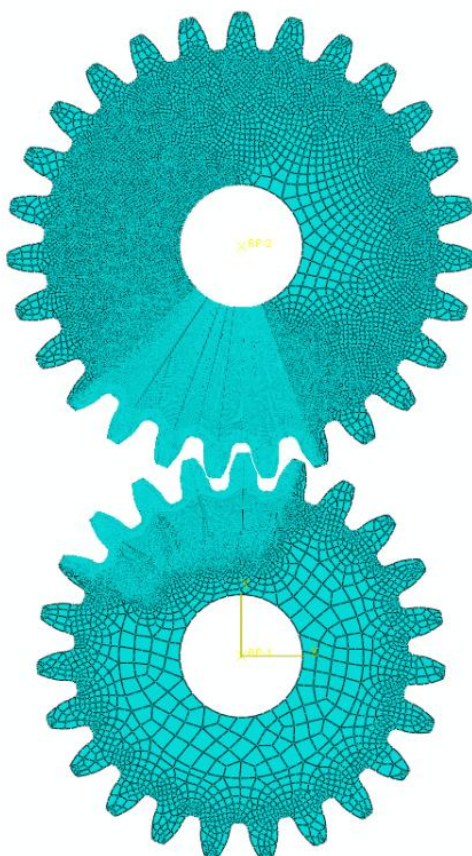
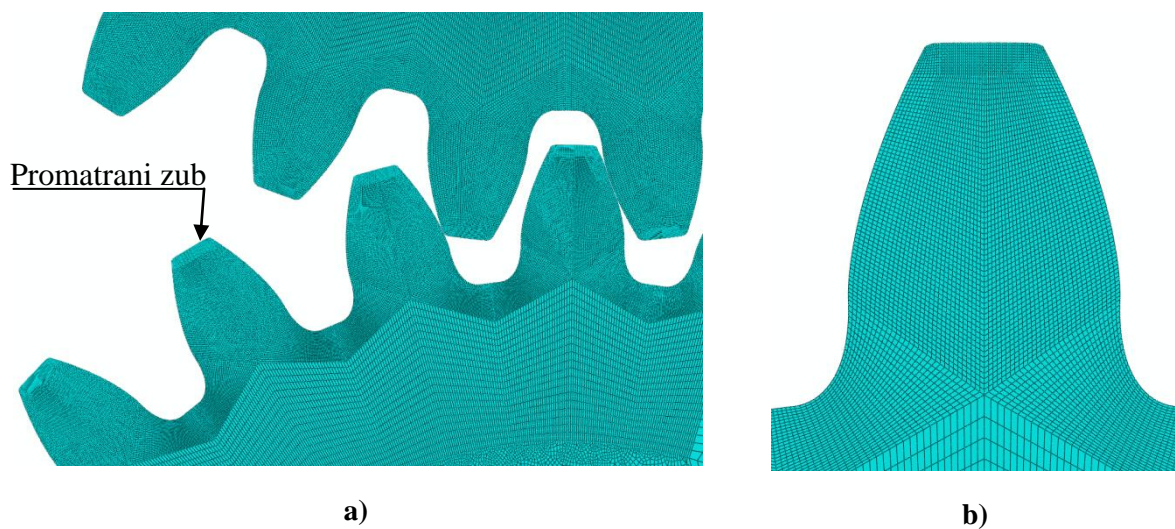
Sljedeća analiza koja se provodi je simulacija prolaska zuba kroz zahvat. Kako zupčanci rotiraju tako različiti zubi ulaze u zahvat te se sila i krak sile na zub mijenjaju. Najčešće kod zupčanika prijenos se istovremeno vrši preko 2 para zubiju, dok postoji i zona jednostrukog zahvata što bi značilo da samo 1 par zubiju prenosi sav moment. U tom dijelu vremena opterećenje na bok i korijen zuba je najveće. Stoga je potrebno kontrolirati najveće glavno naprezanje u korijenu zuba tijekom jednog ciklusa opterećivanja. S obzirom na to da su polimerni zupčanci skloniji većim deformacijama, postoji opasnost od prevelikih deformacija zubiju u zahvatu koji mogu prouzročiti zaribavanje, teškoće u radu, i najgore havariju. Potrebno je promatrati i progibe vrha opterećenih zubiju radi kontrole maksimalne dopuštene deformacije. Smjernica VDI 2736 propisuje dopušteni maksimalni progib vrha zuba, tako da se naknadno vrši usporedba s VDI smjernicom.

### 2.2.1 Simulacija prolaska zuba kroz zahvat bez trenja

Rotacija zupčanika se razloma na inkremente u kojima se odvija statička analiza te se tako stvara slika rotacije zupčanog para. U obzir je uzet samo moment torzije koji prenosi prijenosnik bez ikakvih dodatnih sila koje se javljaju uslijed rotacije. Sklop se napravio tako da se zubi zupčanika skoro dodiruju, postoji mala zračnost između njih. U prvom koraku se pogonski zupčanik s brojem zubiju  $z = 23$  opterećuje momentom torzije  $T$  što dovodi do toga da se uslijed momenta torzije i dopuštene rotacije zupčanik okrene toliko da uđe u zahvat s gonjenim zupčanicom i prenese opterećenje. Gonjenom zupčanicu su onemogućene rotacija i translacije. Rubni uvjeti pomaka i rotacije su narinuti na referentnu točku koja je povezana s unutarnjim promjerom zupčanika opcijom *Kinematic Coupling*. U drugom koraku se

gonjenom zupčaniku dopušta rotacija za onaj kut koji je dovoljan da promatrani zub prođe kroz cijeli ciklus naprezanja, a to je 0,7 rad. Drugi korak traje 10 sekundi, inkrement je 0,05 sekundi što znači da ima 200 inkremenata u samom drugom koraku. Temeljem konvergencije rješenja u analizi 2.1 koriste se *CPS8R* konačni elementi. Prijenos opterećenja sa zuba na zub modelira se opcijom *surface to surface contact* svojstva "*Hard*" *Contact - normal behaviour* u smjeru normale na bok zuba. Rubni uvjeti prikazani su na slici 19. Diskretiziranje je provedeno tako da su se pažljivo diskretizirali zubi koji ulaze u zahvat tijekom rotacije dok ostali zubi zupčanika su diskretizirani opcijom *Free mesh*. Na slici 20 vidljiva je diskretizacija pogonskog zupčanika. Napravljene su particije na zupčaniku da bi se moglo bolje diskretizirati.

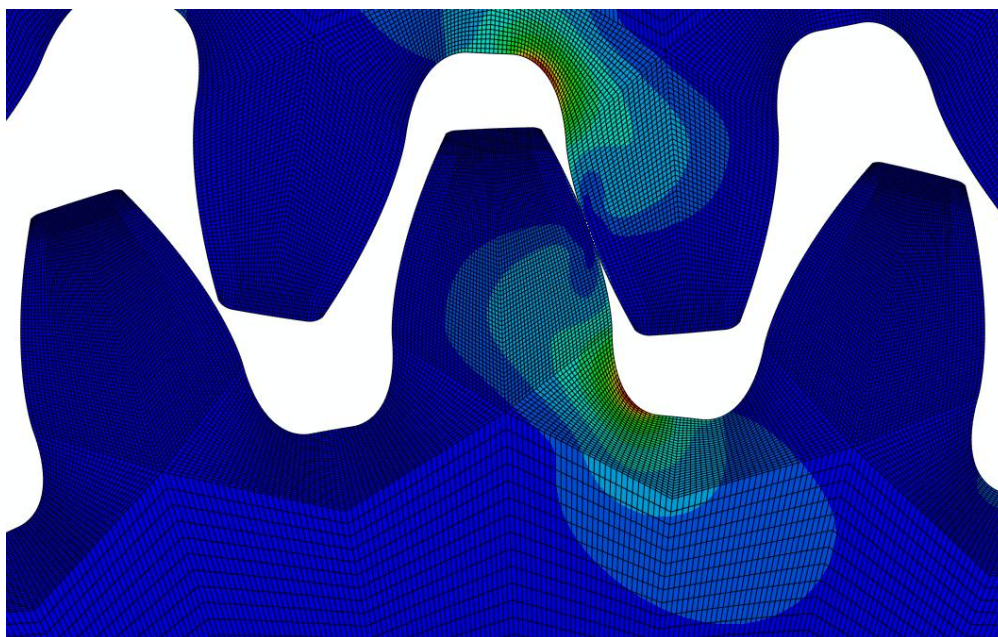


**Slika 20. Diskretizacija zupčanika****Slika 21. Detalj diskretizacije: a) zubi; b) zub**

Moment torzije ispitnog zupčanog para se povećava od 5 do 80 Nm te se promatraju progibi vrha zuba promatranog zupčanika, kontaktno naprezanje boka zuba i glavna naprezanja u

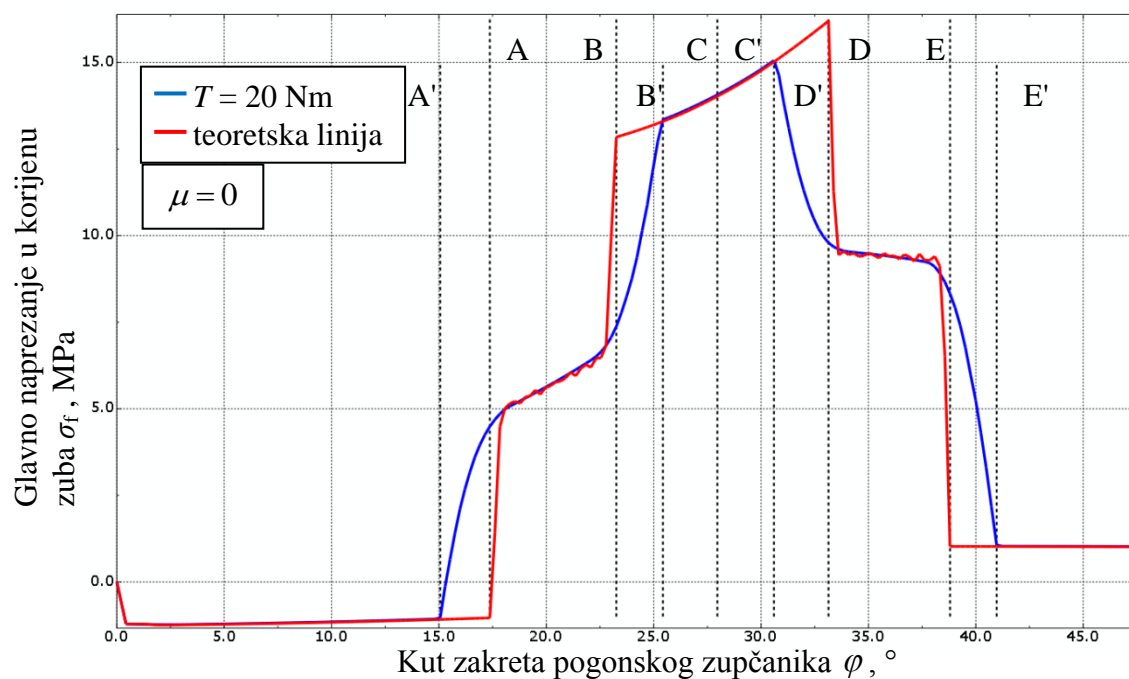


korijenu zuba. Slika 22 prikazuje raspodjelu naprezanja prema *Max Principal* teoriji u jednostrukom zahvatu.



Slika 22. Naprezanje u jednostrukom zahvatu

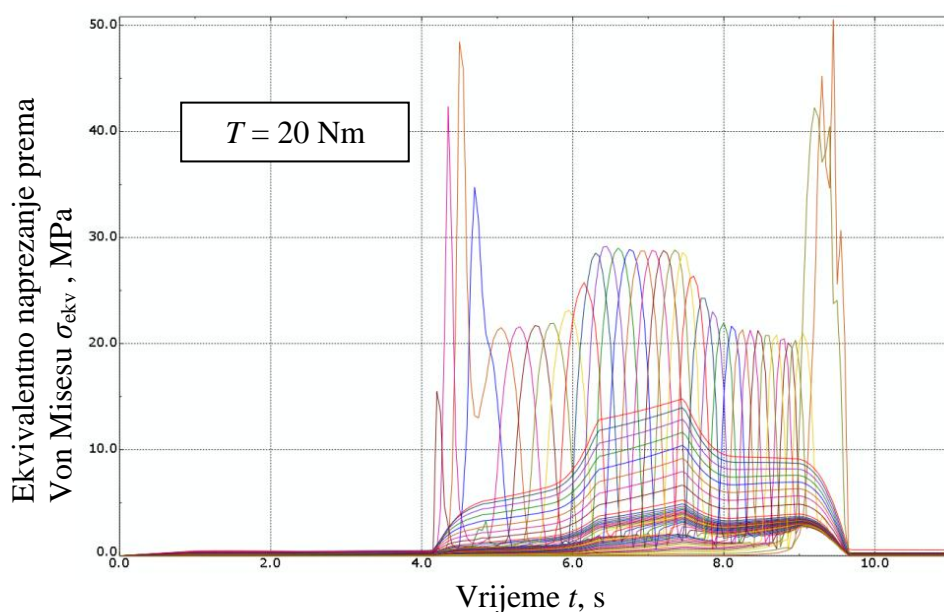
Slika 23 prikazuje ciklus naprezanja zuba pogonskog zupčanika u korijenu zuba u usporedbi sa teoretskim ciklusom naprezanja gdje nema deformacija zuba.



Slika 23. Ciklus naprezanja pogonskog zupčanika pri 20 Nm

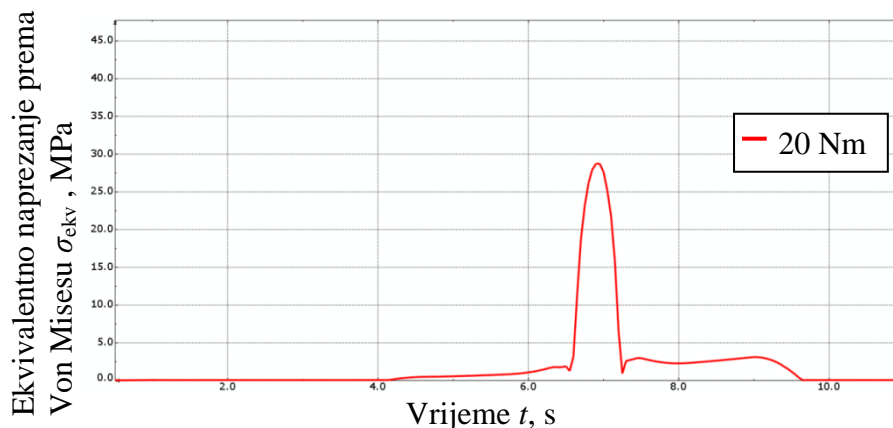
Točke teoretskog puta zahvata označene su slovima A, B, C, D i E, a točke puta zahvata polimernog zupčanika označene su slovima A', B', C', D' i E'. Točka A' označava početak zahvata polimernog zupčanika. Između točke A' i B' javlja se dvostruki zahvat. Točka B se pomiče udesno kod analize polimernih zupčanika. Pomak točke udesno označava produljenje dvostrukog zahvata. Točka C jednaka je i u teoretskom putu zahvata i u analizi polimernih zupčanika. Točka C ne mijenja svoj položaj. Točka D se pomiče ulijevo. Najveće glavno naprezanje se javlja prilikom izlaska zuba iz jednostrukog zahvata, a to je u točki D'. Pomak točke B udesno i pomak točke D ulijevo označava smanjenje jednostrukog zahvata. Time se pogoduje zupčaniku jer je u manjem dijelu ciklusa samo jedan par zubiju opterećen. Točka E se pomiče udesno. Pomak točke A ulijevo i točke E udesno označava produljenje puta zahvata zupčanika. Također, vidljivo je da pri početku rotacije do točke A korijen zuba se nalazi u tlačnoj zoni koju radi prethodni zub koji je već u zahvatu. Prilikom velikih deformacija i naprezanja tlačna zona se proteže sve do korijena promatranog zuba te se to manifestira negativnim naprežanjem u dijagramu. Nakon izlaska iz zahvata javljaju se naprezanja koja uzrokuje nadolazeći zub te radi vlačnu zonu u korijenu promatranog zuba.

Kontaktno naprezanje koje se javlja prilikom dodira zubi zupčanog para ovisi također o vrsti zahvata. Slika 24 prikazuje dijagram promjene ekvivalentnih naprezanja prema Von Misesu boka zuba u ovisnosti o vremenu izvođenja analize što ujedno predstavlja i kut zakreta zupčanika.



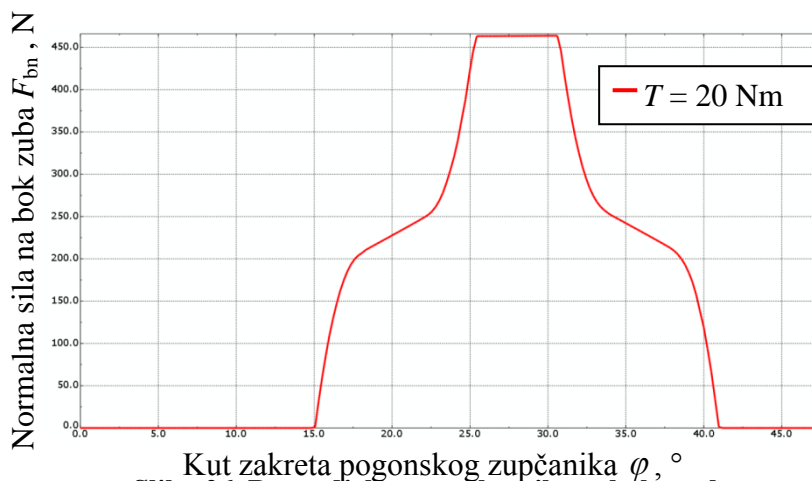
**Slika 24. Ekvivalentna naprezanja boka zuba tokom jednog ciklusa pri 20 Nm prema Von Misesu**

Promatra se svaki čvor zasebno na liniji boka, stoga je dijagram zapravo skup pojedinačnih ekvivalentnih napreznja u čvorovima tokom ciklusa. Na slici 25 prikazana je raspodjela ekvivalentnih napreznja tokom rotacije samo jednog čvora iz slike 24.



Slika 25. Ekvivalentna napreznja prema Von Misesu u jednom čvoru boka zuba

U trenutku kada čvor prenosi silu, napreznja naglo porastu. Krivulja napreznja u tom dijelu je elipsa, isto se može vidjeti na slici 5. Napreznja koja se javljaju dok čvor nije u kontaktu su napreznja nastala posljedicom savijanja zuba. Može se razaznati sa slike 24 veličina ekvivalentnog napreznja prilikom dvostrukog i jednostrukog zahvata ako se gledaju vršne vrijednosti dobivenih u svakom čvoru. U dvostrukom zahvatu veličina kontaktnog napreznja je manja od veličine u jednostrukom zahvatu. Prilikom ulaska i izlaska zuba iz zahvata javljaju se skokovi u napreznju. Uslijed preuranjenog kontakta zaobljeni vrh zuba ulazi u kontakt sa korijenom drugog zuba. Radijus zaobljenja vrha zuba ima utjecaj na porast napreznja [12]. Na promjenu kontaktnog napreznja djeluje i promjena normalne sile duž zahvata. Normalna sila na zub prilikom njegovog opterećenja se računa opcijom *CFNM* u *History Output Requestu*. Dijagram normalne sile na bok zuba tokom njegovog ciklusa opterećenja prikazan je na slici 26.

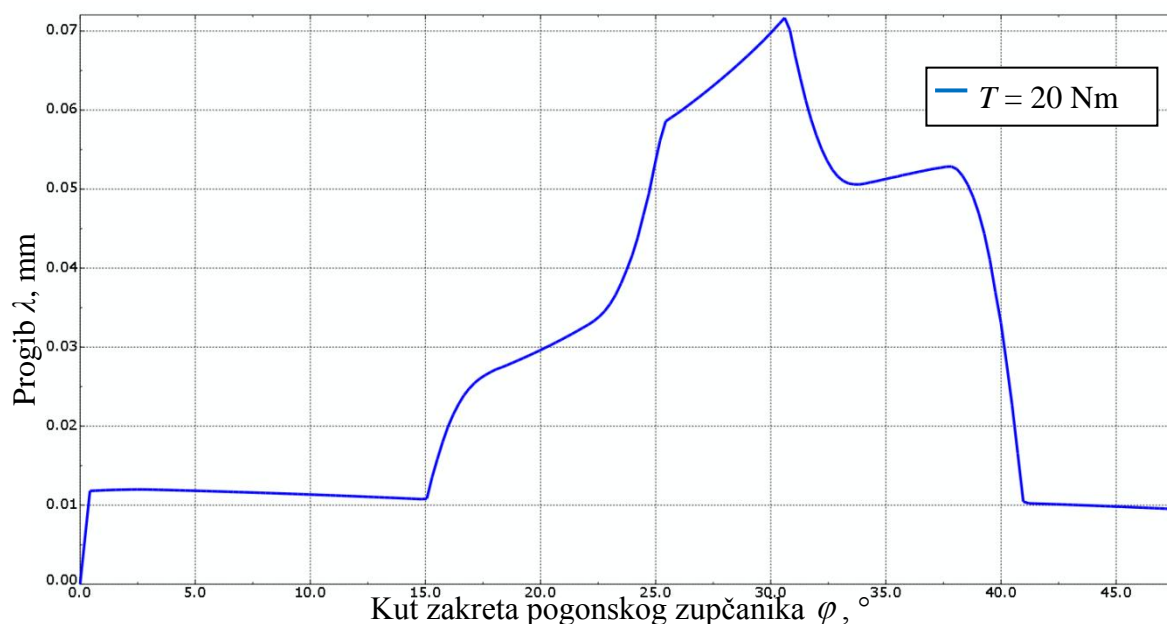


Slika 26. Raspodjela normalne sile po boku zuba



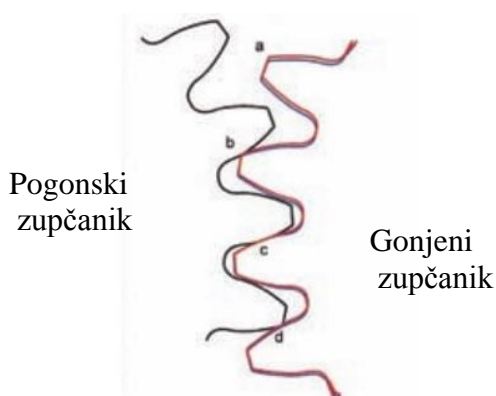
Vidljivo da je sila najveća u jednostrukom zahvatu. Vidljivo je da se dijagrami raspodjele normalne sile na slici 26 i dijagram ciklusa naprezanja pogonskog zupčanika pri 20 Nm na slici 23 poklapaju u smislu ulaska u jednostruki zahvat. Najveća kontaktna naprezanja se javljaju u jednostrukom zahvatu kao posljedica rasta normalne sile.

Progib vrha zuba pogonskog zupčanika se javlja kao posljedica deformacija koje se javljaju prilikom opterećivanja zuba zupčanika. Progibi vrha opterećenih zubiju su značajni već i pri malim prijenosima snage zbog toga što je polimer PA 66 nižeg modula elastičnosti od čelika. Slika 27 prikazuje raspodjelu progiba vrha zuba u jednom ciklusu naprezanja.



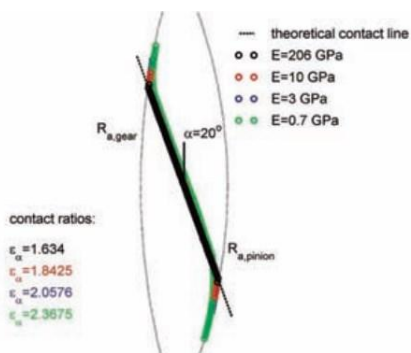
**Slika 27. Raspodjela progiba u jednom ciklusu naprezanja zuba**

Očitavanje progiba vrši se u kartezijevom koordinatnom sustavu opcijom *Spatial Displacement - Magnitude*. Progib koji se javlja na početku analize pa sve do ulaska u dvostruki zahvat i od izlaska iz zahvata pa do kraja analize je posljedica kašnjenja zupčanika zbog relativno velikog opterećenja, a malog modula elastičnosti [12]. Prema slici 28 vidljivo je da postoji značajan utjecaj modula elastičnosti na ponašanje zupčanika. Crvena linija predstavlja polimerni zupčanik dok crne linije predstavljaju čelične zupčaničke.

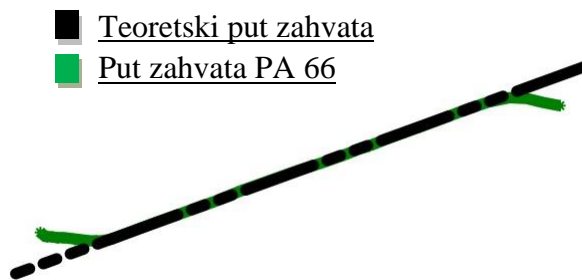


**Slika 28. Utjecaj modula elastičnosti na savijanje zuba zupčanika [12]**

U primjeru sa slike 28 gonjeni zupčanik je polimerni. Zupčanik manjeg modula elastičnosti (crvena linija) rani sa ulaskom u zahvat [12]. Maksimalan progib vrha zuba je važan faktor koji igra ulogu u dimenzioniranju polimernih zupčanika tako da se dalje bude promatrao samo maksimalan progib vrha zuba. Također, zanimljivo je promatrati kašnjenje zupčanika i što se događa sa zahvatom zupčanika kad je omjer opterećenja i modula elastičnosti puno manji nego što je uobičajeno. Put zahvata se povećava s povećanjem opterećenja i sa smanjivanjem modula elastičnosti. Zubi kako se sve više i više deformiraju kasne sa izlaskom iz zahvata te se tako put produljuje. Slika 29 prikazuje ovisnost puta zahvata o modulu elastičnosti. Slika 30 prikazuje liniju zahvata polimernih zupčanika materijala PA 66 pri opterećenju od 20 Nm dobivenu uzimanjem točaka pojedinih koraka u zahvatu zuba. Naknadnim interpoliranjem između točaka dobije se krivulja.



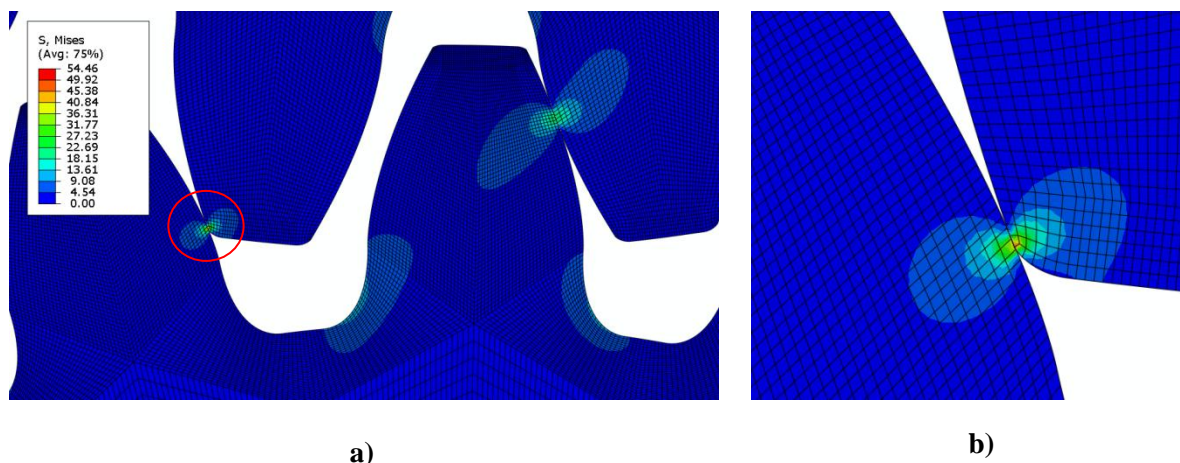
**Slika 29. Puta zahvata u ovisnosti o materijalu [12]**



**Slika 30. Put zahvata zupčanog para materijala PA 66 pri 20 Nm**

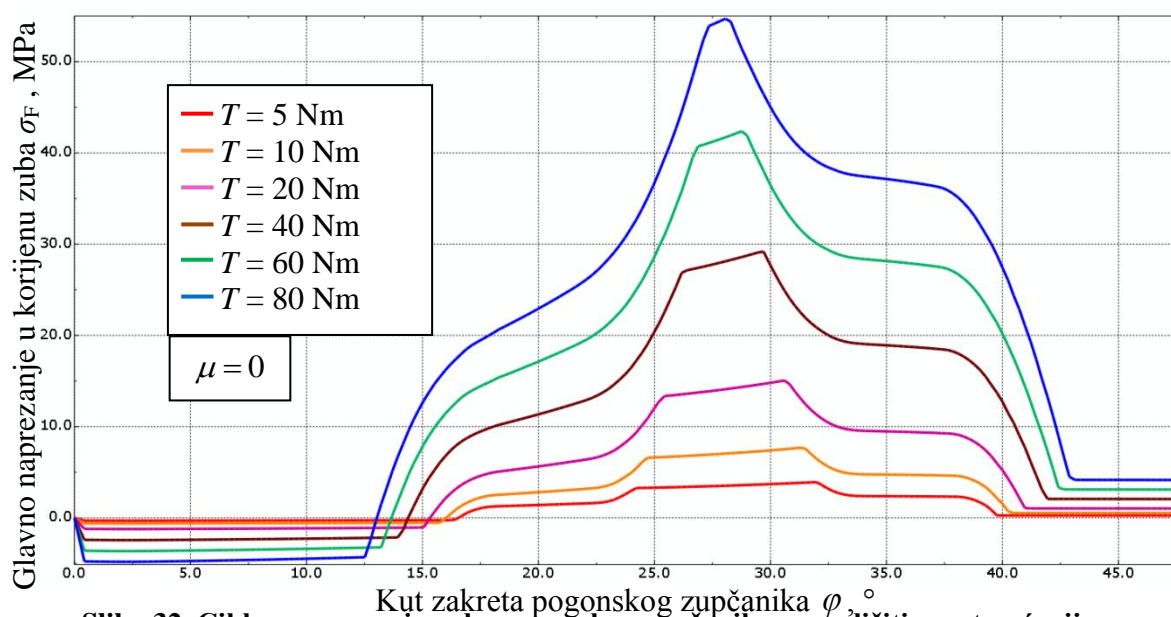
Produljenje puta zahvata se ne očituje kao nastavak ravne linije već se savija od linije teoretskog puta zahvata. Produljenje koje se javlja pri ulasku i izlasku u zahvat se savija točno oko tjemениh promjera oba zupčanika [12]. Gledajući slike 30 i 24 može se zaključiti da

skokovi naprezanja ovise o produljenom putu zahvata. Zbog savijanja zubiju i produljenog puta zahvata javlja se preuranjeni i produljeni kontakt među zubima. U preuranjenom kontaktu prilikom ulaska u zahvat zaobljeni vrh zuba dolazi u kontakt sa korijenom pogonskog zupčanika dok u produljenom kontaktu pri izlasku iz zahvata zaobljeni vrh zuba pogonskog zupčanika je u kontaktu sa korijenom zuba gonjenog zupčanika [12]. Javlja se ne evolventni kontakt [12]. Slika 31 prikazuje skokove naprezanja prilikom ulaska u zahvat.



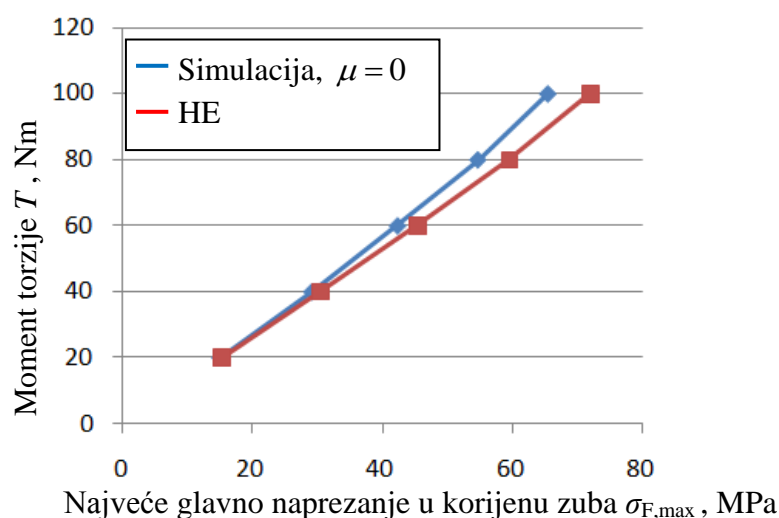
**Slika 31. Ne evolventni kontakt: a) skok naprezanja prilikom ulaska u dvostruki zahvat; b) detalj skoka naprezanja**

Prilikom ulaska zuba pogonskog zupčanika u zahvat vrh gonjenog zuba ga dodiruje sa svojim rubom koji je blago zaobljen i stvara koncentraciju naprezanja koja uzrokuje skok na slici 24. Da zupčanici nemaju zaobljene bridove na vrhu, koncentracija naprezanja bi bila i veća te bi postojala velika opasnost od urezivanja vrha zuba u korijen ili bok drugog zuba i postojala bi također opasnost od otkrhnuća te stvaranja otkrnutih dijelova koji mogu imati abrazivna djelovanja na bokove zubi. Produljenje puta zahvata može se promatrati u dijagramu ciklusa naprezanja zuba pogonskog zupčanika pri različitim opterećenjima. Slika 32 prikazuje dijagram ciklusa naprezanja zuba pogonskog zupčanika pri različitim opterećenjima.



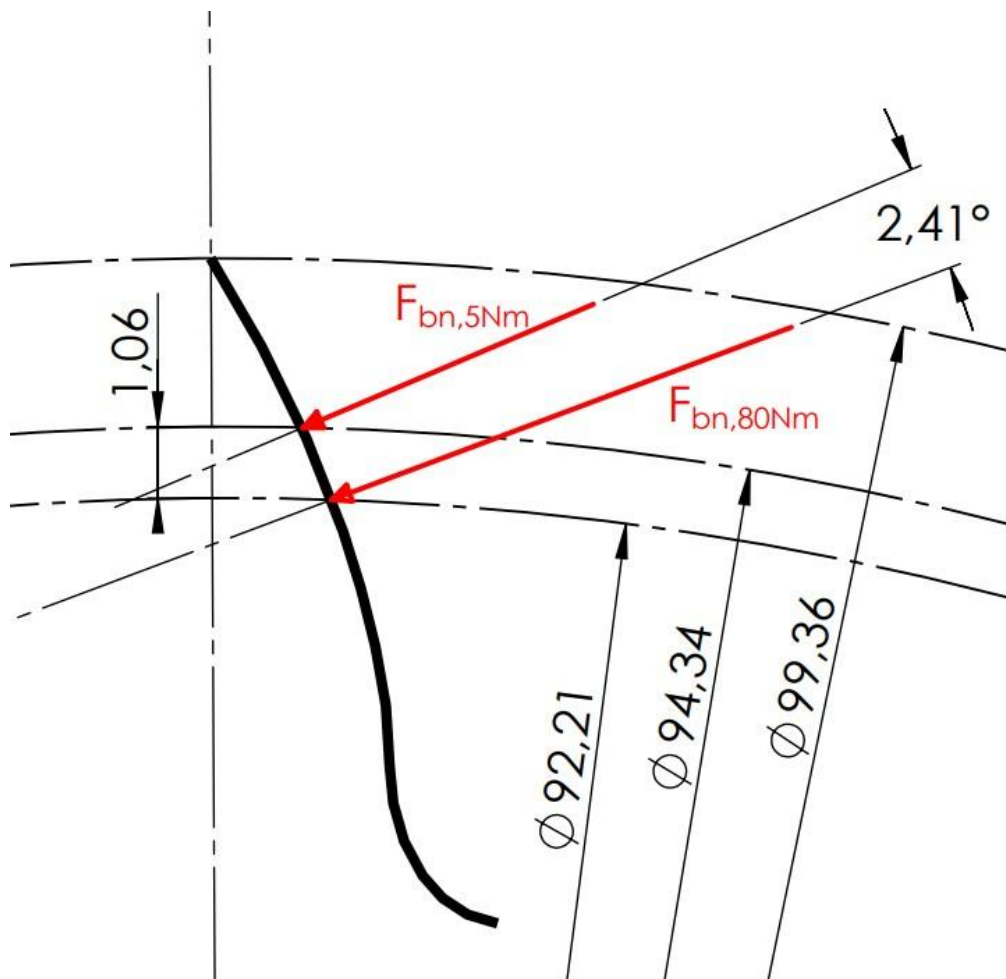
Slika 32. Ciklus naprezanja zuba pogonskog zupčanika sa različitim opterećenjima

S porastom opterećenja može se primjetiti pad duljine jednostrukog zahvata te porast ukupnog puta zahvata što se vidi i na slici 32. Što je opterećenje veće to zub prije ulazi u zahvat i kasnije izlazi što ima negativne posljedice s obzirom na skok kontaktnog naprezanja. Vidljivo je sa slike 32 da je utjecaj tlačne zone koja se javlja između  $0^\circ$  i  $15^\circ$  sve veći te također i utjecaj vlačne zone koja se javlja nakon izlaska zuba iz zahvata je veći. Sljedeće što se promatra je utjecaj opterećenja na porast najvećeg glavnog naprezanja. Također, analizirao se rast naprezanja uslijed povećanja opterećenja kod analize s koncentriranom silom u hiperelastičnom području. Slika 34 prikazuje usporedbu dviju analiza. Rotacija predstavlja zahvat zubiju zupčanika uslijed rotacije bez trenja dok HE model predstavlja analizu jednostrukog zahvata koncentriranom silom.



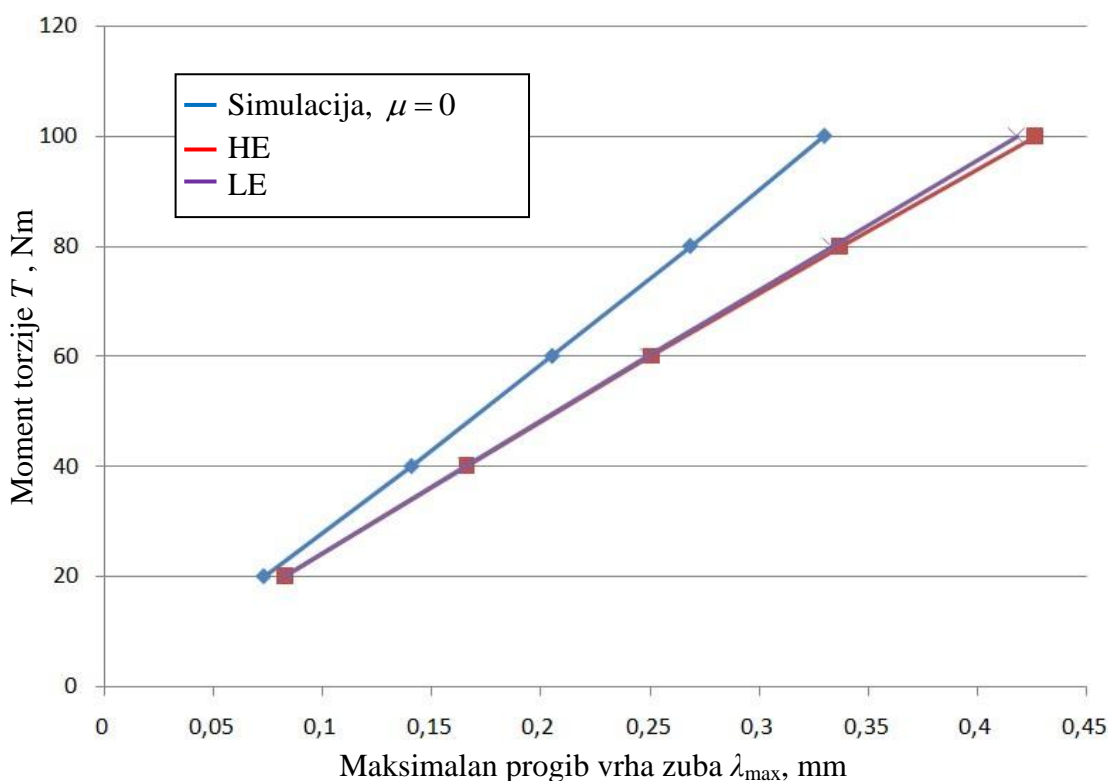
Slika 33. Usporedba porasta naprezanja ovisno o momentu

Pri manjim opterećenjima rezultati koje daju analize su podjednake. Međutim, s porastom opterećenja razlika raste. Krivulji simulacija se usporava rast naprezanja više nego HE krivulji. Točka na liniji zahvata zupčanika u kojoj se javljaju najveća glavna naprezanja mijenja svoj položaj s povećanjem opterećenja. To se može vidjeti na slici 32. Slika 34 prikazuje djelovanje sile na bok zuba pri opterećenju od 5 i 80 Nm.



**Slika 34. Promjena položaja točke najvećeg glavnog naprezanja**

Kut upada sile se povećao s opterećenjem od 80 Nm, a krak djelovanja sile se smanjio. Deformacije koje se javljaju s povećanjem opterećenja uzrokuju to da se točka najvećeg glavnog naprezanja pomiče na manji promjer djelovanja. Smanjenjem promjera djelovanja sile smanjuje se i krak djelovanja sile na korijen zuba. S obzirom da se s porastom momenta torzije povećava razlika u najvećem glavnom naprezanju za navedene analize za očekivati je da se razlika u maksimalnom progibu također povećava. Slika 35 prikazuje ovisnost progiba o porastu momenta torzije.



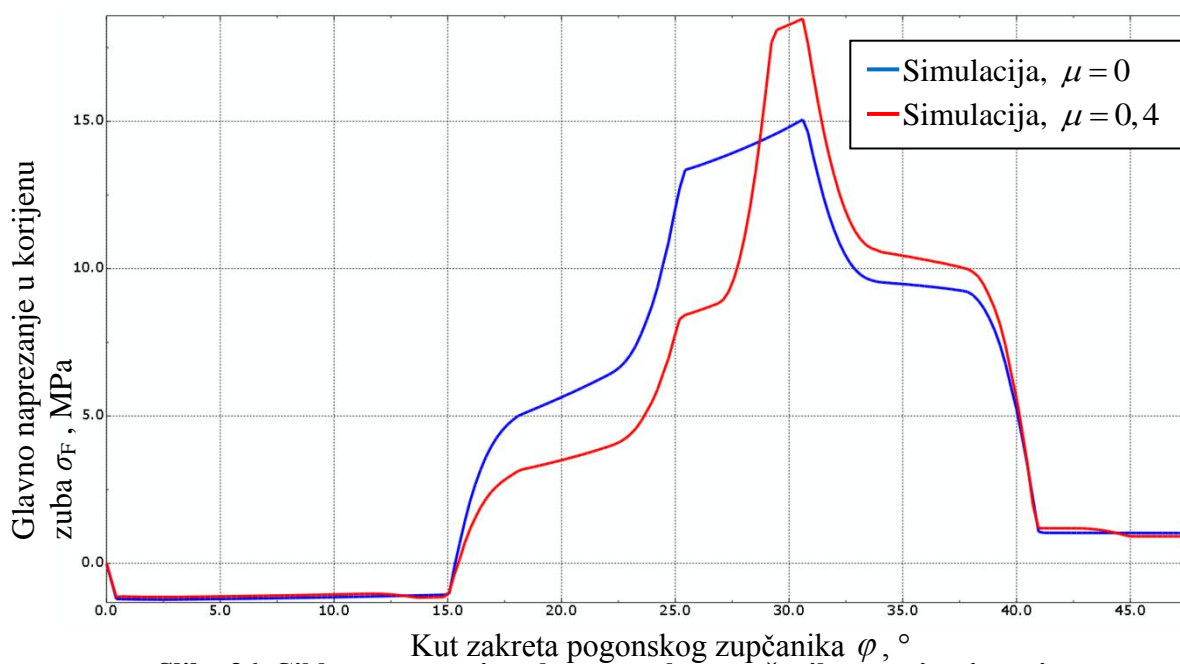
Slika 35. Usporedba porasta progiba ovisno o momentu

Razlika maksimalnog progiba vrha zuba analize s HE modelom i rotacije je značajnija i veća nego utjecaj kod naprezanja. Vidi se također da LE i HE modeli u analizi jednostrukog zahvata koncentriranom silom podjednako dobro opisuju ponašanje materijala. Do sad su sve analize provedene bez utjecaja trenja. Sljedeća analiza koja se provodi ima utjecaj trenja.

### 2.2.2. Simulacija prolaska zuba kroz zahvat uz utjecaj trenja

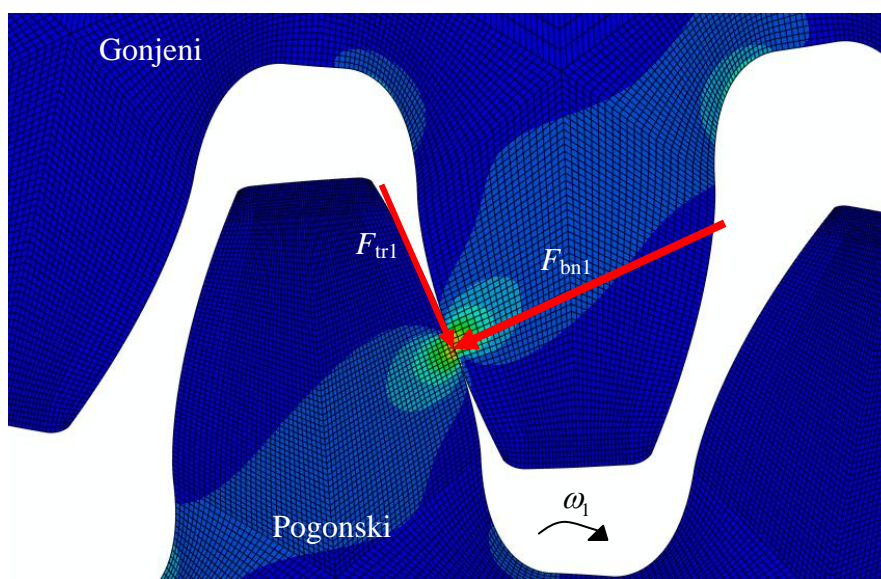
Prednost poliamidnih zupčanika je što ne moraju nužno imati podmazivanje za nesmetan rad. U raznim područjima se pojavljuje primjena polimernih zupčanika bez podmazivanja. Poliamid ima dobra svojstva samopodmazivanja što znači da se zupčani par može pogoniti na suho. Faktor trenja očitao iz [13] iznosa je 0,4 pri suhom trenju. Pretpostavljen je kao konstantan. U *Abaqusu* se trenje modelira tako da se pod *Interaction properties* doda opcija *Tangential Behaviour*. Koristi se *Penalty* metoda za modeliranje trenja. Utjecaj različitih metoda za opisivanje trenja prikazan je u [11]. Geometrija zupčanika, diskretizacija i rubni uvjeti su ostali isti kao u 2.2.1 analizi. Utjecaj trenja na ciklus naprezanja prikazan je na slici 36.





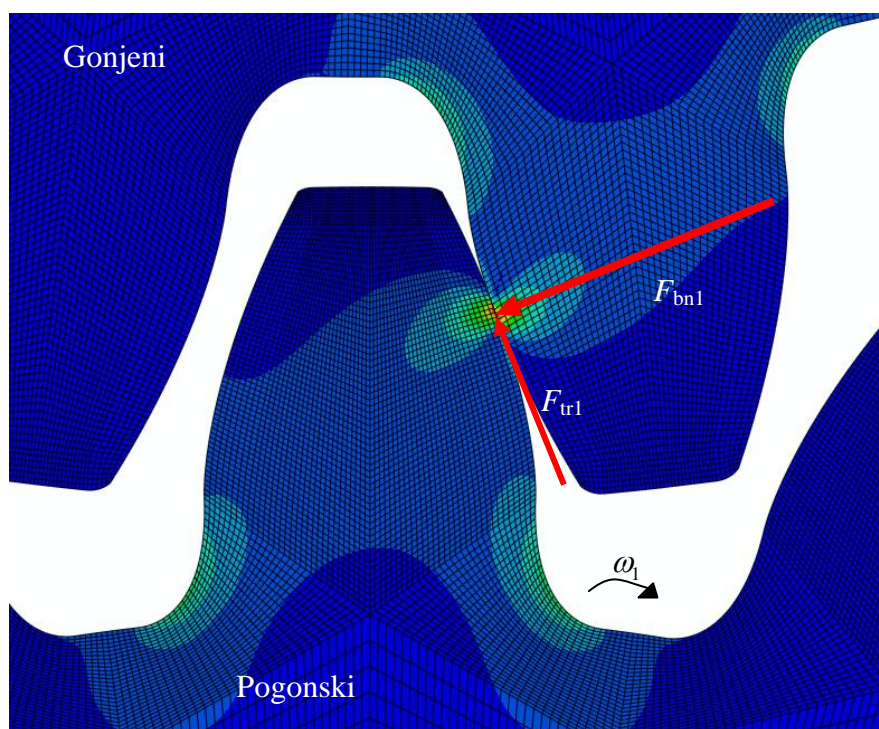
Slika 36. Ciklus naprezanja zuba pogonskog zupčanika uz utjecaj trenja

Zub pogonskog zupčanika prilikom ulaska u zahvat pa sve do kinematskog pola klizi po zubu gonjenog zupčanika tako da trenje uzrokuje smanjivanje naprezanja u korijenu zuba. To je vidljivo na slici 37 između A' i C' točke.



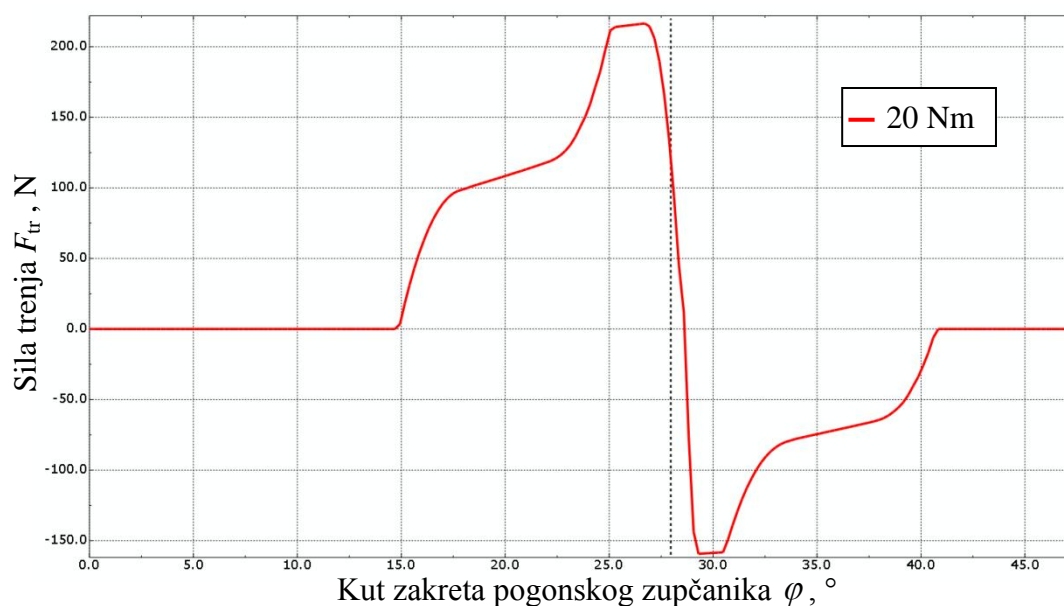
Slika 37. Sila trenja između A' i C' točke zahvata

Nakon prolaska točke C, sila trenja mijenja svoj smjer što doprinosi rastu naprezanja u korijenu zuba. Smjer djelovanja sile trenja nakon točke C prikazan je na slici 38.



Slika 38. Sila trenja između C i E' točke zahvata

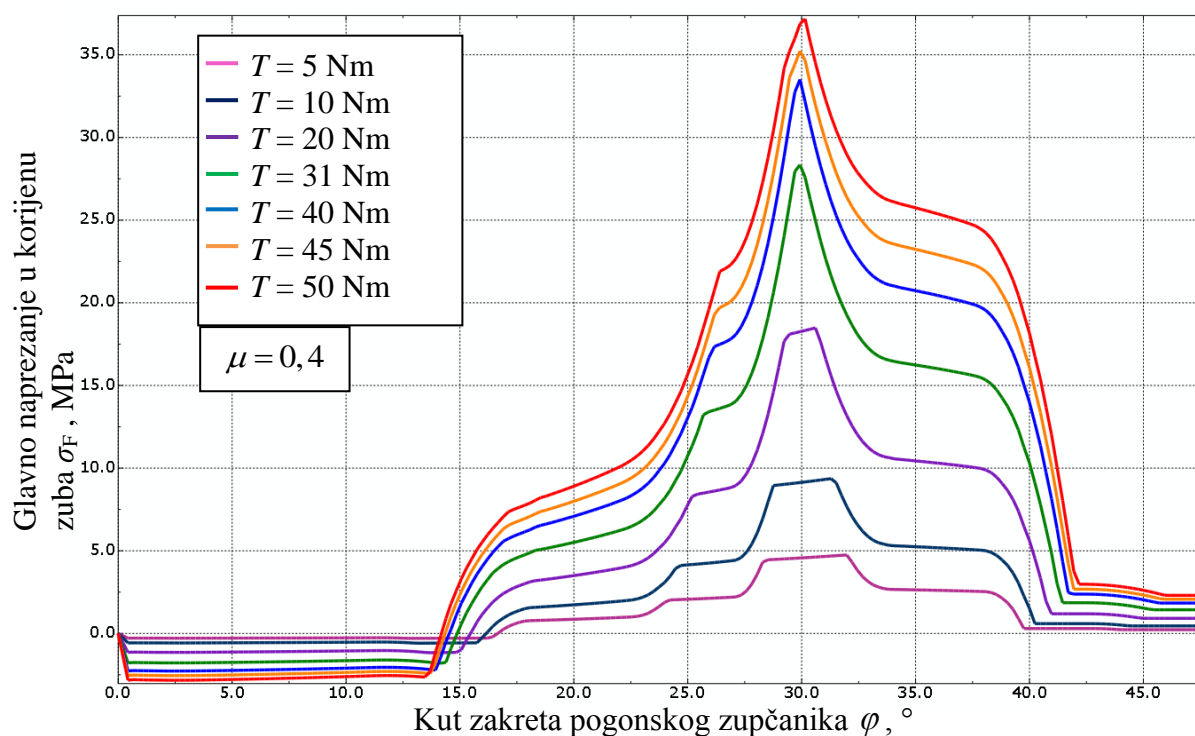
Promjenu smjera djelovanja sile trenja zorno prikazuje dijagram na slici 39.



Slika 39. Promjena smjera sile trenja kroz zahvat

U kinematskom polu sila trenja mijenja svoj smjer. Iznos sile trenja se događa postepeno smanjivanjem do 0 i onda povećavanjem ponovno u drugom smjeru. Promatrani zub pogonskog zupčanika u obje analize u isto vrijeme ulazi i izlazi iz zahvata. Na slici 40 prikazane su krivulje ciklusa naprezanja zuba pogonskog zupčanika s utjecajem trenja s različitim opterećenjima.





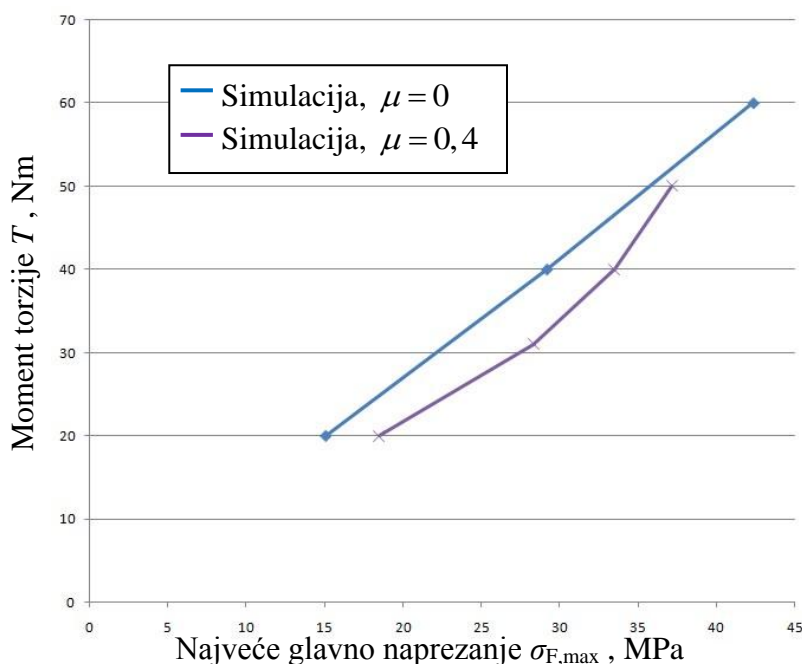
**Slika 40. Ciklus naprezanja zuba pogonskog zupčanika s utjecajem trenja s različitim opterećenjima**

S povećanjem opterećenja put zahvata se povećava. Razlika kuta zakreta pri ulasku u jednostruki zahvat i kut zakreta pri najvećem glavnom naprezanju se pri povećanju opterećenja na manjim iznosima smanjuje, to se može vidjeti ako se gledaju krivulje manjih opterećenja. Suprotno tome, razlika se ne mijenja pri rastu opterećenja od 40 Nm do 50 Nm. Iz dijagrama se vidi da se točka najvećeg glavnog naprezanja pomiče udesno. Tablica 3 prikazuje kut ulaska u jednostruki zahvat i vrijeme najvećeg glavnog naprezanja.

**Tablica 3. Kut ulaska u jednostruki zahvat i vrijeme najvećeg glavnog naprezanja**

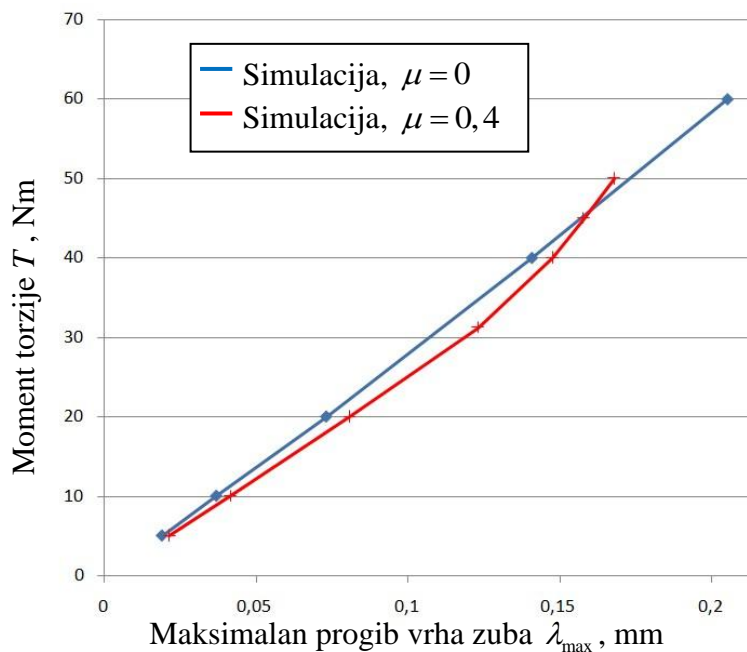
Moment torzije $T$ , Nm	Kut zakreta $\varphi$ , °		Razlika
	Ulazak u jednostruki zahvat	Najveće glavno naprezanje	
40	26,17	29,93	3,76
45	26,17	29,93	3,76
50	26,4	30,15	3,75

Kako se vrijeme jednostrukog zahvata mora smanjivati, jedino što preostaje za zaključiti je da se najveće glavno naprezanje javlja u dvostrukom zahvatu. Ako se usporede najveća glavna naprezanja u analizama sa i bez trenja vidljivo je da su najveća glavna naprezanja uslijed analize sa trenjem veća. Isto je prikazano na slici 41.



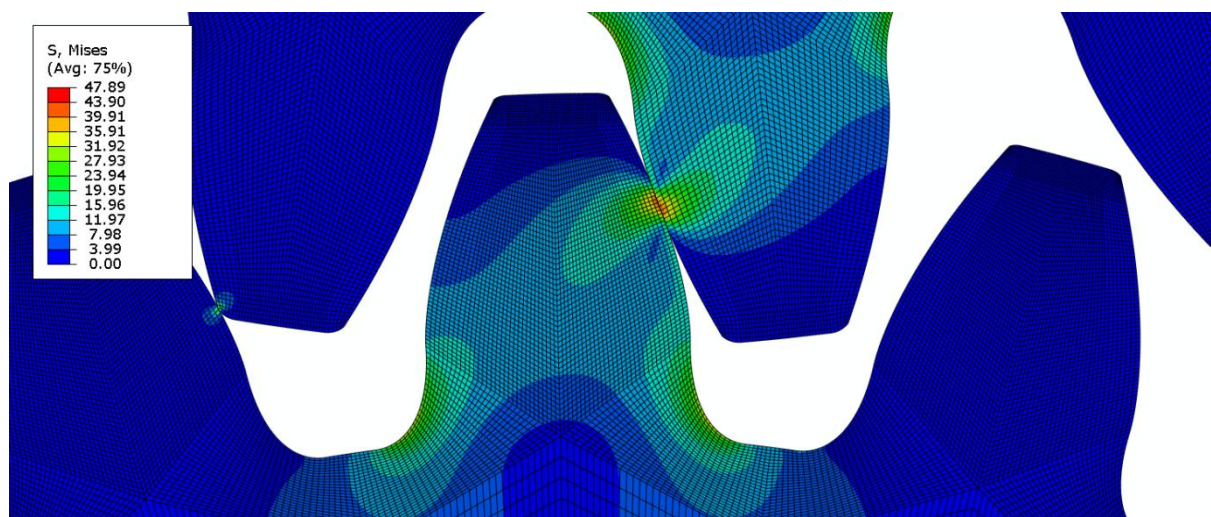
**Slika 41. Usporedba najvećih glavnih napreznja analiza sa i bez trenja**

Vidljivo je da simulaciji s utjecajem trenja raste nagib krivulje s povećanjem opterećenja. To znači da najveće glavno napreznje sve sporije i sporije raste. Utjecaj trenja na maksimalan progib vrha zuba prikazan je na slici 42.



**Slika 42. Usporedba progiba analiza sa i bez trenja**

Trend rasta maksimalnog progiba vrha zuba se mijenja s obzirom na opterećenje. Utjecaj deformacija zubi polimernih zupčanika je značajan. Najveće glavno napreznje se javlja u pri kutu zakreta od  $29,93^\circ$  za opterećenje od 40 Nm što bi odgovaralo poziciji na slici 43.



**Slika 43. Pozicija zupčanika pri najvećem glavnom naprezanju uslijed opterećenja od 40 Nm analize sa trenjem**

Vidljivo je da je zub pri najvećem glavnom naprezanju ušao već u dvostruki zahvat što objašnjava pad rasta naprezanja uslijed povećanja opterećenja prikazanog na slici 41. Sila na promatrani zub se smanjuje ulaskom u dvostruki zahvat, međutim krak djelovanja sile na korijen zuba se povećava te tako povećava i glavno naprezanje. Jedno od mogućih objašnjenja je to da sila trenja koja mijenja svoj smjer i povećava se, usporava pad normalne sile.

### 3. ANALITIČKI PRORAČUN

#### 3.1 Proračun zupčanika smjernicom VDI 2736

Analitički proračun se vrši smjernicom VDI 2736. Kod polimernih zupčanika se jednako kao i kod metalnih proračunavaju naprezanja u korijenu zuba i kontaktna naprezanja na boku zuba.

##### 3.1.1 Proračun naprezanja u korijenu zuba

Prema proračunu korijena zuba se podrazumijeva da naprezanja koja se javljaju u korijenu zuba pogonskog zupčanika su posljedica sile uslijed prenošenja snage na zub gonjenog zupčanika. Generalno se proračun nosivosti izvodi na oba zupčanika, međutim kako je u numeričkim analizama promatran samo pogonski zupčanik, tako će se i ovdje izvršiti proračun samo za pogonski zupčanik. Jednadžba koja opisuje naprezanje u korijenu zuba glasi:

$$\sigma_F = K_F \cdot Y_{Fa} \cdot Y_{Sa} \cdot Y_\varepsilon \cdot Y_\beta \cdot \frac{F_t}{b \cdot m}, \quad (3.1)$$

gdje je  $F_t = 434,5$  N tangencijalna sila koja djeluje na zub pri opterećenju momentom torzije od 20 Nm,  $b = 25$  mm širina zupčanika,  $m = 4$  mm modul zupčanika.  $K_F \approx K_A$  je faktor raspodjele opterećenja kojem ova jednakost vrijedi sve dok je omjer  $b/m \leq 12$ . Faktor primjene  $K_A$  se očitava u normi DIN 3990 ili u dinamičkoj analizi. Za ovaj proračun je pretpostavljen faktor primjene  $K_A = 1$ . Faktor oblika  $Y_{Fa}$  očitava se iz [13] i iznosi  $Y_{Fa} = 2,9$ . Faktor korekcije naprezanja  $Y_{Sa} = 1,67$  očitavan je iz [13]. Faktor učešća opterećenja računa se prema formuli

$$Y_\varepsilon = 0,25 + 0,75/\varepsilon_\alpha, \quad (3.2)$$

gdje je  $\varepsilon_\alpha$  stupanj prekrivanja. Stupanj prekrivanja računa se prema formuli

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_a \quad (3.3)$$

iz [3]. Vrijednosti pojedinih članova u (3.3) računaju se prema

$$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{d_{a1}^2 - d_{b1}^2}}{2 \cdot p_e}, \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sqrt{d_{a2}^2 - d_{b2}^2}}{2 \cdot p_e}, \quad (3.5)$$

$$\text{i} \quad \varepsilon_a = \frac{a \cdot \sin \alpha_w}{2 \cdot p_e}. \quad (3.6)$$

Temeljni promjer računa se prema

$$\begin{aligned} d_{b1} &= d_{w1} \cdot \cos \alpha_w, \\ d_{b2} &= d_{w2} \cdot \cos \alpha_w, \end{aligned} \quad (3.7)$$

gdje je  $d_{w1} = d_1$  i  $d_{w2} = d_2$ . Promjeri diobenih kružnica su

$$d_1 = z_1 \cdot m = 92 \text{ mm} \quad (3.8)$$

$$\text{i} \quad d_2 = z_2 \cdot m = 108 \text{ mm}. \quad (3.9)$$

Pogonski kut zahvata  $\alpha_w = 20^\circ$ . Korak zahvatne crte računa se prema

$$p_e = p \cdot \cos \alpha = m \cdot \pi \cdot \cos \alpha. \quad (3.10)$$

Ubacivanjem vrijednosti iz (3.7) i (3.10) u (3.4), (3.5), (3.6) dobiju se pojedine vrijednosti

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sqrt{d_{a1}^2 - d_{b1}^2}}{2 \cdot p_e} = \frac{\sqrt{100,679^2 - 86,452^2}}{2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \cos 20} = 2,185, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sqrt{d_{a2}^2 - d_{b2}^2}}{2 \cdot p_e} = \frac{\sqrt{115,321^2 - 101,487^2}}{2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \cos 20} = 2,319, \\ \varepsilon_a &= \frac{a \cdot \sin \alpha_w}{2 \cdot p_e} = \frac{100 \cdot \sin 20}{2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \cos 20} = 2,8964. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Ubacivanjem vrijednosti iz (3.11) u (3.3) izračunava se stupanj prekrivanja koji iznosi

$$\varepsilon_a = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_a = 2,185 + 2,319 - 2,8964 = 1,6. \quad (3.12)$$

Ubacivanjem stupnja prekrivanja u formulu (3.2) izračunava se faktor učešća opterećenja koji iznosi

$$Y_e = 0,25 + 0,75/1,6 = 0,72. \quad (3.13)$$

Faktor  $Y_\beta$  je faktor raspodjele opterećenja po širini zuba, a obzirom da promatramo zupčanike sa ravnim zubima faktor iznosi  $Y_\beta = 1$ . Ubacivanjem vrijednosti faktora, tangencijalne sile, širine i modula zupčanika u jednadžbu (3.1) izračunava se naprezanje u korijenu zuba koje iznosi

$$\sigma_F = K_F \cdot Y_{Fa} \cdot Y_{Sa} \cdot Y_e \cdot Y_\beta \cdot \frac{F_t}{b \cdot m} = 1 \cdot 2,9 \cdot 1,67 \cdot 0,72 \cdot \frac{434,5}{25 \cdot 4} = 15,15 \text{ MPa}. \quad (3.14)$$

### 3.1.2 Proračun opterećenja boka zuba

Proračun opterećenja boka zuba dovoljno je izvršiti samo na jedan zupčanik u zupčanom paru ako su oba napravljena od istog materijala. Proračun se vrši na pogonskom zupčaniku. Formula kontaktnog ili Hertzovog naprezanja je

$$\sigma_H = Z_E \cdot Z_H \cdot Z_\epsilon \cdot Z_\beta \cdot \sqrt{\frac{F_t \cdot K_H}{b_w \cdot d_1} \cdot \frac{u+1}{u}}, \quad (3.15)$$

gdje je

$$Z_E = \sqrt{\frac{1}{\pi \cdot \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)}} \quad (3.16)$$

faktor elastičnosti, a Poissonov koeficijent  $\nu_1 = \nu_2 = 0,4$  očitao je iz [13]. Modul elastičnosti je jednak za oba zupčanika  $E_1 = E_2 = 3100 \text{ N/mm}^2$ . Ubacivanjem vrijednosti Poissonovog koeficijenta i modula elastičnosti za pojedine zupčanike izračunava se faktor elastičnosti koji iznosi

$$Z_E = \sqrt{\frac{1}{\pi \cdot \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)}} = \sqrt{\frac{1}{\pi \cdot \left( \frac{1-0,4^2}{3100} + \frac{1-0,4^2}{3100} \right)}} = 24,235 \sqrt{\text{N}}/\text{mm} . \quad (3.17)$$

Faktor oblika zuba  $Z_H = 2,5$  očitava se iz [13]. Faktor prekrivanja računa se prema formuli

$$Z_\epsilon = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1,6}} = 0,79, \quad (3.18)$$

a faktor raspodjele opterećenja po širini zuba  $Z_\beta = 1$ . Faktor  $K_H$  je jednak i kod proračuna naprezanja u korijenu zuba i pretpostavit će se da iznosi 1,  $F_t = 434,5 \text{ N}$  je tangencijalna sila,  $b_w = 25 \text{ mm}$  širina zupčanika,  $d_1 = 92 \text{ mm}$  diobeni promjer pogonskog zupčanika i  $u = 1,174$  omjer broja zubi. Ubacivanje svih izračunatih i očitanih vrijednosti u jednadžbu (3.15) izračunavaju se kontaktna naprezanja koja iznose

$$\sigma_H = Z_E \cdot Z_H \cdot Z_\epsilon \cdot Z_\beta \cdot \sqrt{\frac{F_t \cdot K_H}{b_w \cdot d_1} \cdot \frac{u+1}{u}} \quad (3.19)$$

$$\sigma_H = 24,235 \cdot 2,5 \cdot 0,79 \cdot 1 \cdot \sqrt{\frac{434,5}{25 \cdot 92} \cdot \frac{1,174+1}{1,174}} = 28,31 \text{ MPa}$$

### 3.1.3 Proračun progiba vrha zuba

Smjernica ukazuje da je potrebno gledati maksimalan progib vrha zuba u smjeru oboda jer utječe na rad zupčanika. Ako je progib  $\lambda \geq 0,07 \cdot m$  dolazi do smetnji u radu zupčanika.

Dovodi se do toga da se smanjuje životni vijek zupčanog para te se povećava buka prilikom rada. Progib se računa izrazom

$$\lambda = \frac{7,5 \cdot F_t}{b} \cdot \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right), \quad (3.20)$$

gdje je tangencijalna sila  $F_t = 434,5 \text{ N}$ , širina zupčanika  $b = 25 \text{ mm}$ , dok su  $E_1$  i  $E_2$  moduli elastičnosti zupčanika  $E_1 = E_2 = E = 3100 \text{ N/mm}^2$ . Dopusteni progib je

$$\lambda_{\text{dop}} = 0,07 \cdot m = 0,07 \cdot 4 = 0,28 \text{ mm}, \quad (3.21)$$

a izračunati je

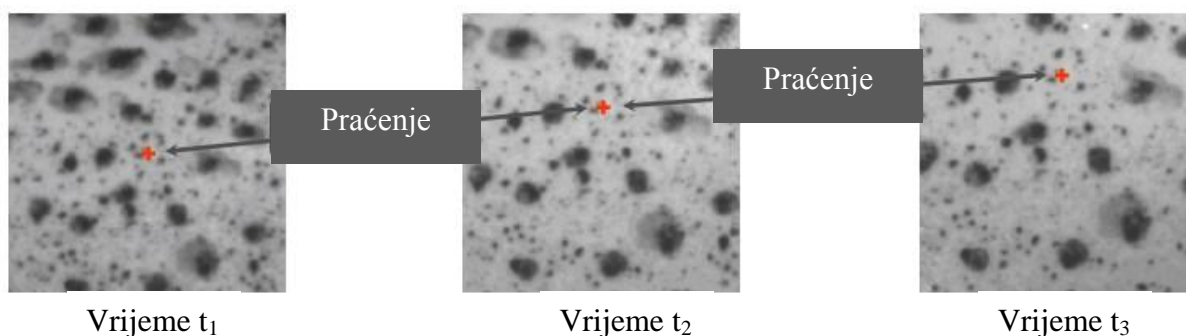
$$\lambda = \frac{7,5 \cdot F_{bt}}{b} \cdot \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) = \frac{7,5 \cdot 434,5}{25} \cdot \left( \frac{1}{3100} + \frac{1}{3100} \right) = 0,0841 \text{ mm}. \quad (3.22)$$

Važno je napomenuti da progibi očitani u numeričkim analizama i u ispitivanju uzimaju u obzir i radijalni pomak vrha zuba zupčanika.

## 4. ISPITIVANJE

### 4.1. Digitalna korelacija slike

Digitalna korelacija slike [14] je optička metoda koja se koristi za analizu deformacija promatranih uzoraka. Metoda koristi tehnike praćenja i registriranja slika, 2D i 3D mjerenje promjena u slikama. Pokazala se raznovrsnom i jeftinom metodom za analizu deformacija zbog razvitka fotoaparata s visokom rezolucijom i računala. Koristeći stohastički uzorak na površini objekta, položaj svake točke u dvije slike može se identificirati primjenom korelacijskog algoritma. Korelacijski algoritam temelji se na praćenju sive vrijednosti uzorka u malim lokalnim susjednim točkama. Princip rada prikazan je na slici 44.



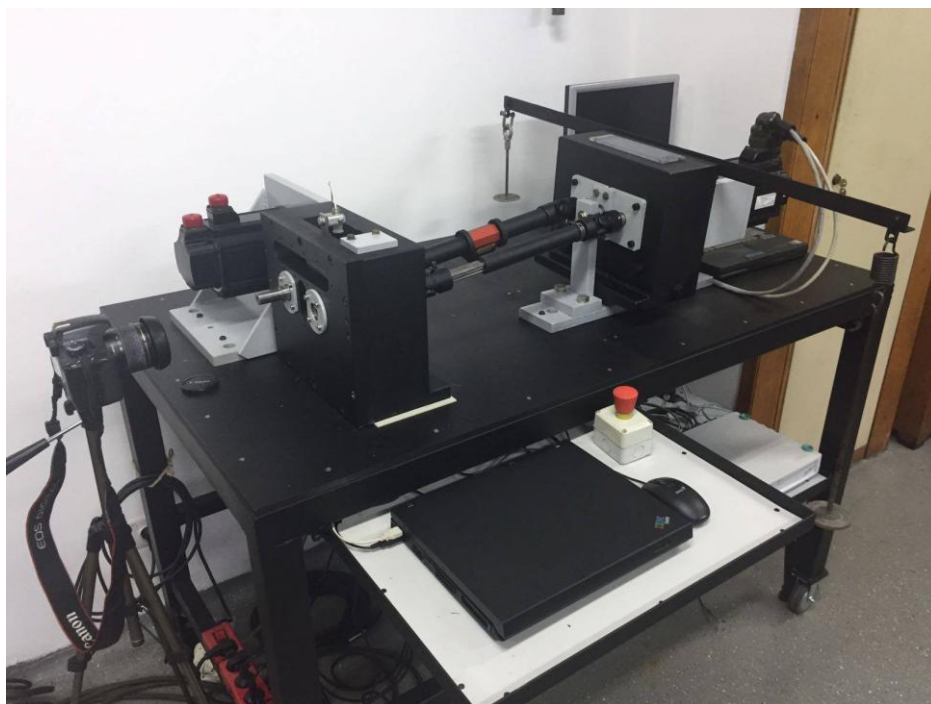
Slika 44. Princip rada digitalne obrade slike [14]

Najčešća područja uporabe su za ispitivanje materijala, u mehanici loma i testiranje raznoraznih objekata. Ono što je cilj dobiti s ovom metodom je jednostavnost i točnost uz minimalni trošak.

### 4.2. Ispitivanje zupčanika

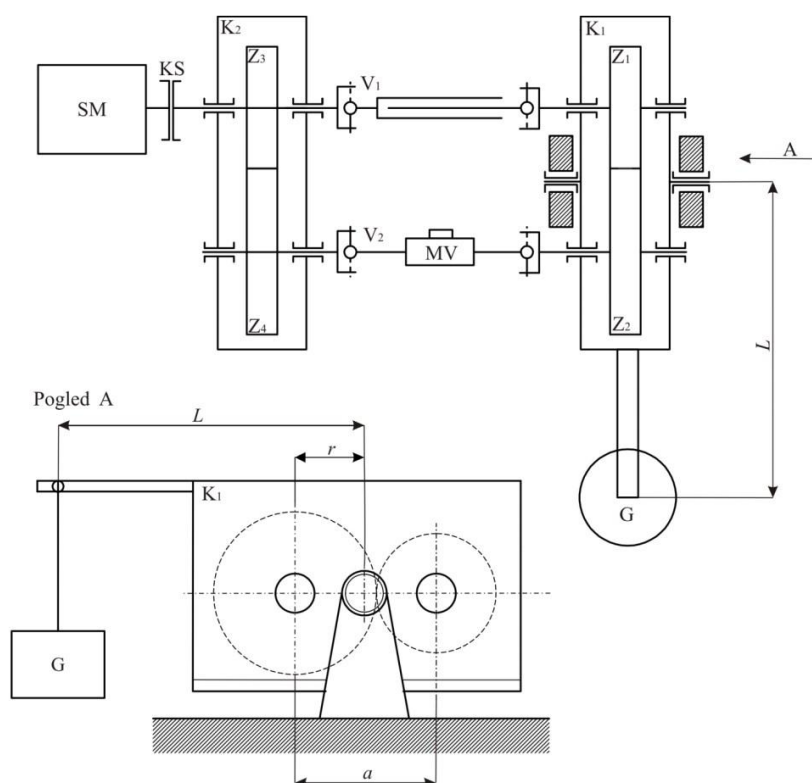
Ispitivanje zupčanika provedeno je u *Labaratoriju za elemente strojeva FSB-a*. Ispitno postolje koje služi za ispitivanje prikazano je na slici 46. Ispitni uređaj je uređaj sa zatvorenim tokom snage. Sastoji se od 2 zupčana para ( $Z_1$ - $Z_2$ ,  $Z_3$ - $Z_4$ ) povezana kardanskim vratilima ( $V_1$  i  $V_2$ ) i mjernim vratilom (MV). Kućište ( $K_2$ ) je učvršćeno za podlogu, a kućištu ( $K_1$ ) je omogućeno zakretanje oko središta osnog razmaka. Opterećenje na zupčanike se narine tako da se zakrene kućište i unese vanjski moment. Vanjski moment se unosi u sustav preko poluge dužine  $L$  i utega  $G$  [15]. Slika 45 prikazuje sustav za ispitivanje.





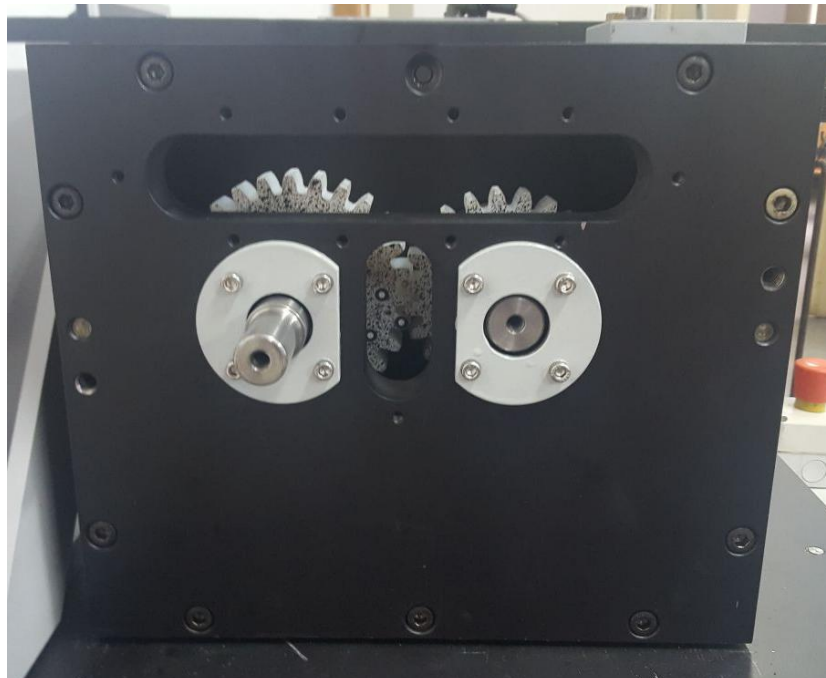
Slika 45. Sustav za ispitivanje

Shema postolja prikazana je na slici 46.



Slika 46. Shema ispitnog postolja [15]

Postupnim slikanjem zahvata zupčanika mjere se deformacije i progibi promatranog zuba. Fotoaparat koji se koristi za slikanje promjena tokom zahvata je Canon EOS 450D. Prozor kroz koji se slikaju zupčanici prikazan je na slici 47.



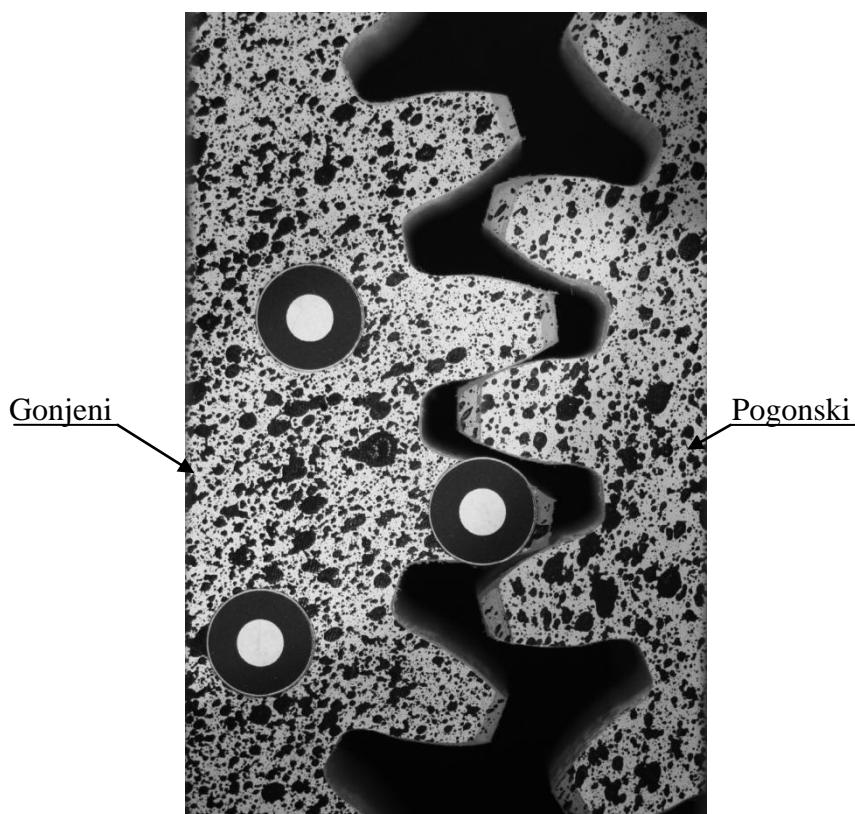
**Slika 47. Slikanje zupčanika**

Programski paket za obradu slika i analizu deformacija je *GOM Correlate* [16]. Prvo što se radi je pripremanje zupčanika kako bi se omogućila obrada slika. Zupčanici se pripremaju na način da se na bočne plohe zupčanika nanosi bijeli sprej bez sjaja tako da se cijela bočna ploha uzorka pokrije i zabijeli. Koristi se sprej marke Ambro-Sol, prikazan na slici 48.



**Slika 48. Ambro-Sol sprej [17]**

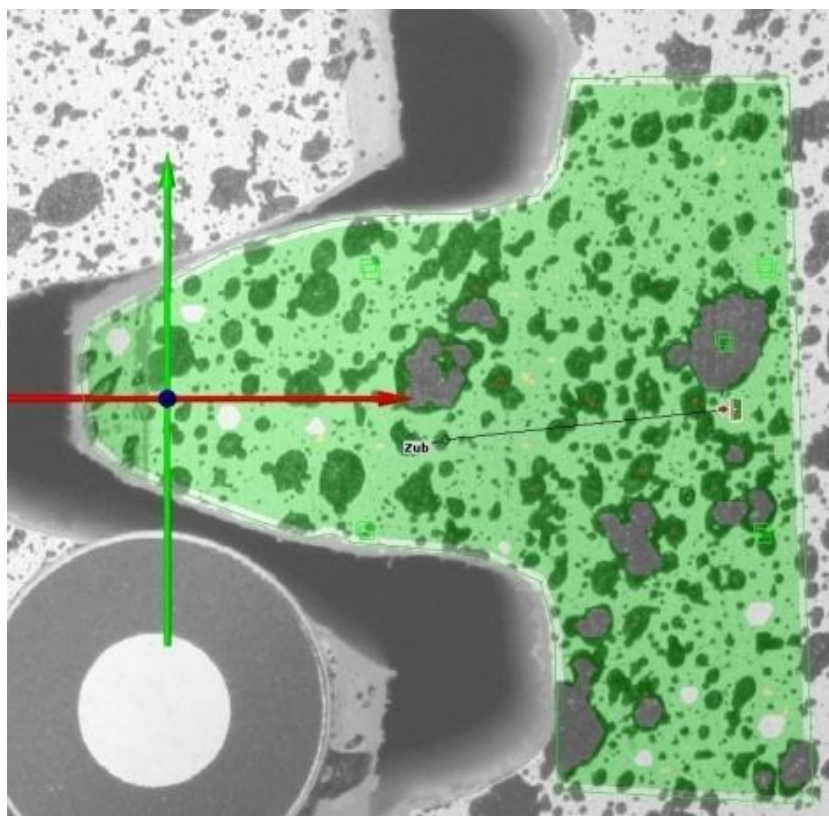
Nakon što se nanešena boja osuši potrebno je nanijeti crni sprej bez sjaja u malim kapljicama tako da se napravi stohastički uzorak. Slika 49 prikazuje pripremljene zupčanike u zahvatu.



**Slika 49. Priprema zupčanika**

Zupčanici su postavljeni tako da je desni (manji) zupčanik pogonski. Manji zupčanik je postavljen tako da je središnji zub na slici 49 što bliže krajnjoj točki jednostrukog zahvata gdje se i javljaju najveća glavna naprezanja i najveći progibi kao što se može vidjeti na slici 23. Stohastički uzorak koji je napravljen crnom bojom služi za očitavanje progiba i deformacija. Program automatski prepoznaje uzorke i mjeri promjene koje se događaju u razlikama udaljenosti prepoznatih uzoraka. Za kalibraciju dimenzija unutar slike poslužile su crno bijele točke kojima je unutarnji promjer 3 mm. Nakon što su se zupčanici pripremili provodi se ispitivanje s postupnim povećanjem vanjskog momenta. Postavljanje fotoaparata je bitan dio samog ispitivanja. Fotoaparat mora biti postavljen pod kutem od  $90^\circ$  na promatranu plohu zupčanika. Bilo kakvo odstupanje od kuta slikanja ili odstupanje od planarne ravnine prilikom povećanja opterećenja rezultira pseudodeformacijama. Pseudodeformacije su deformacije koje se očituju tokom obrade u programu, međutim nastale su zbog pogrešaka u postavkama ispitivanja. Dvodimenzijsko ispitivanje komercijalnim fotoaparatom je jeftino, lako izvedivo, ali i vrlo sklono pogreškama u samom ispitivanju. U program *Correlate* se ubacuju slike ispitivanja pod opcijom *Deformation Image*. Potrebno je imenovati slike redoslijedom tako da program može skup slika automatski poredati po redu kako je ispitivanje provođeno. Nakon

dobave slika u sam program potrebno je stvoriti površinsku komponentu slike koja se promatra i služi za analizu. Pod opcijom *Surface Component...* moguće je postaviti parametre poput *Facet size* i *Point distance*. *Facet size* je veličina promatranog uzorka, dok je *Point distance* najmanja udaljenost dvaju uzorka. Manipulacijom navedenih parametara kvaliteta uzorka se mijenja, točnije kvaliteta stvorene površine se mijenja. Optimalnim odabirom parametara se utječe na kvalitetu uzorka i krajnje na dobivene rezultate. Veličina odabranih parametara je *Facet size* = 15 pixels i *Point distance* = 7 pixels. Slike 50 i 51 prikazuju nastalu površinu iz koje će se mjeriti deformacije i progibi te kvalitetu uzorka u toj površini.



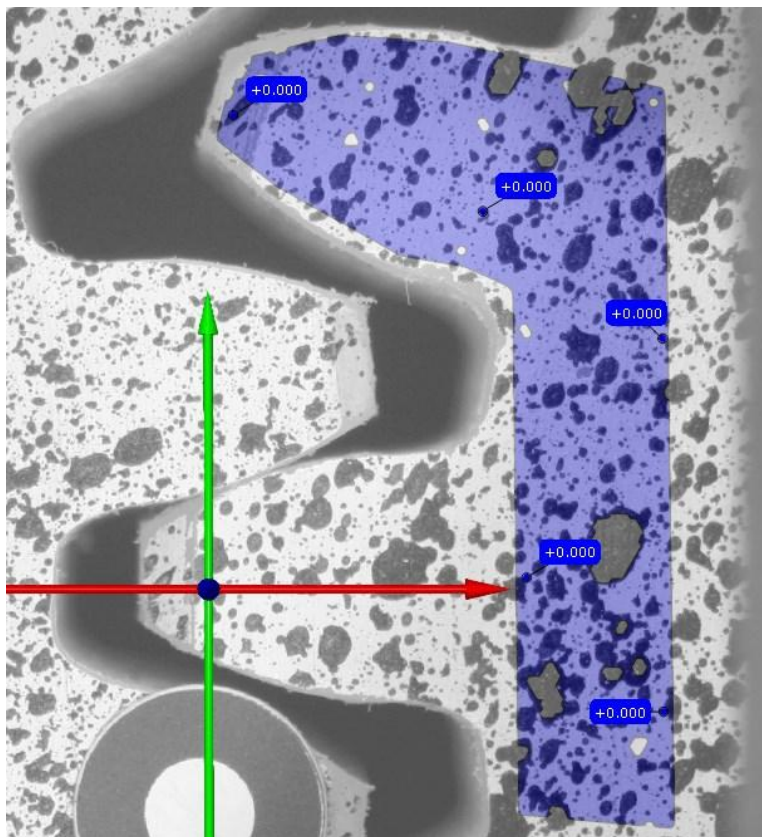
**Slika 50. Površina promatranog zuba pogonskog zupčanika**



**Slika 51. Kvaliteta uzorka površine promatranog zuba pogonskog zupčanika**

Površina prikazana na slici 50 prati oblik zuba tako da se smanji opseg procesa i ubrza analiza, također i da se smanje nepravilnosti zupčanika koje mogu stvoriti greške u analizi. Parametri postavljanja površine su se namještali prema kvaliteti uzorka. Cilj je staviti što manje parametre a da kvaliteta uzorka ostane dobra. Vidi se na slici 51 da je kvaliteta uzorka zadovoljavajuća, zelena boja označava da je kvaliteta dobra. Koordinatni sustav se stvara

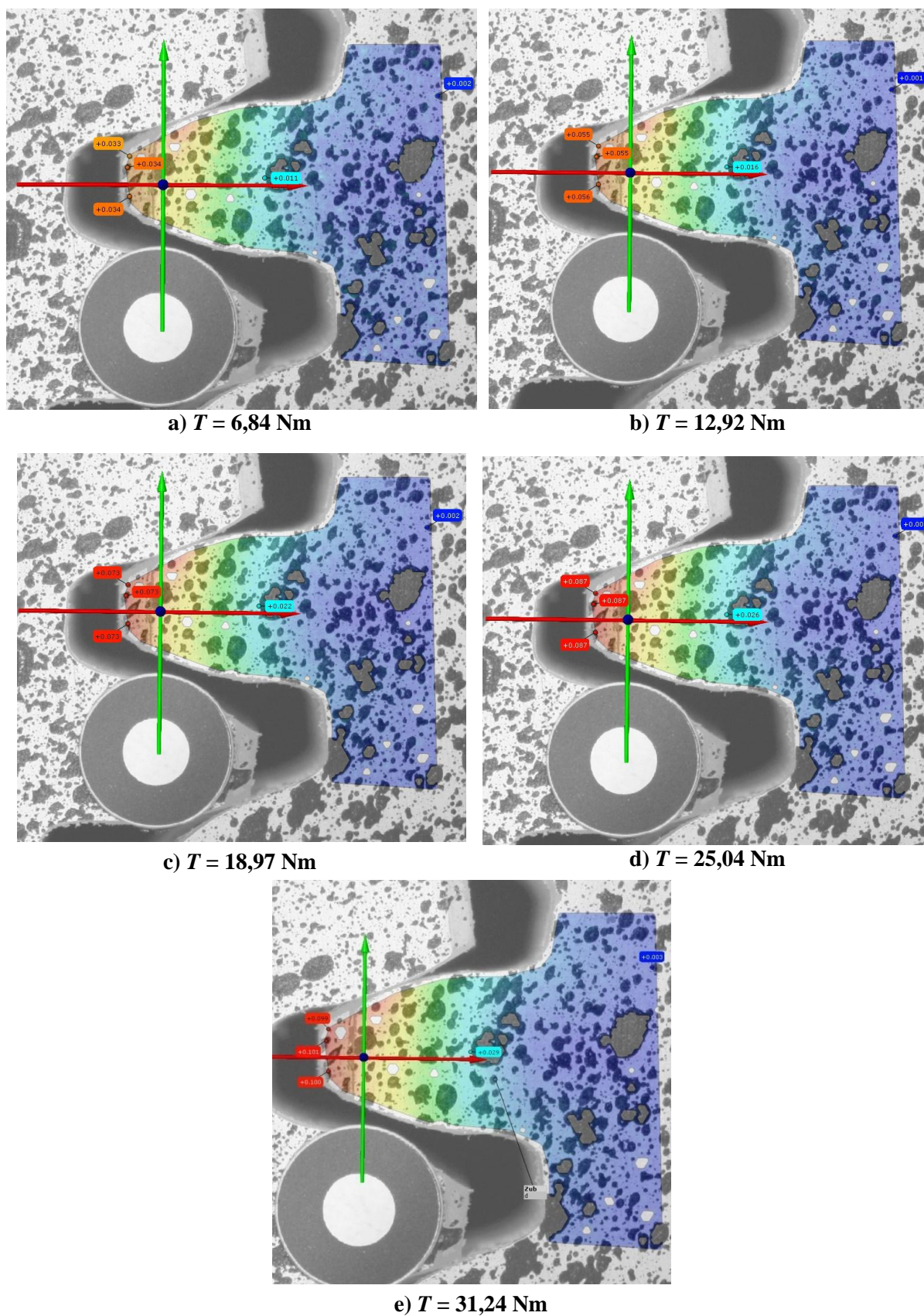
opcijom *3-2-1 alignment*. Problem koji se javlja prilikom ove analize je to što se zupčanici malo zarotiraju s povećanjem opterećenja. Potrebno je ukloniti rotaciju zupčanika tako da se rotacija ne zbraja pod povećanje progiba. Rotacija zupčanika se javlja zbog elastičnosti vratila. Tom problemu se doskočilo na način da se stvara nova površina koja služi kao referentna. Referentna površina se radi na pogonskom zupčanicu i prikazana je na slici 52.



Slika 52. Referentna površina

Opcijom *Rigid Body Motion Compensation* se anulira rotacija zupčanika i ta površina služi kao referentna. Promatraju se relativni progibi i deformacije promatranih površina obzirom na referentnu. Odabiranjem opcije *Displacement* promatraju se progibi odabrane površine. Prilikom ispitivanja opterećenje vanjskim momentom se povećavalo postepeno do konačnog momenta od 31,24 Nm. Na slici 53 su prikazani progibi ispitivanog zuba. Prikazani progibi su u milimetrima.





**Slika 53. Rezultati ispitivanja: a)  $T = 6,84 \text{ Nm}$ ; b)  $T = 12,92 \text{ Nm}$ ; c)  $T = 18,97 \text{ Nm}$ ; d)  $T = 25,04 \text{ Nm}$ ; e)  $T = 31,24 \text{ Nm}$**

Pozitivna vrijednost progiba ne označava progib u pozitivnom smjeru osi već samo ukupni iznos progiba koji predstavlja najkraću udaljenost koju je točka prošla. Nije se mogao očitati progib vrha zuba zupčanika, nego malo dalje od vrha što je posljedica same pripreme zupčanika i postavki unutar programa *Correlate*. U tablici 4 je prikazan maksimalni progib ispitivanog zuba pogonskog zupčanika obzirom na narinuto opterećenje.

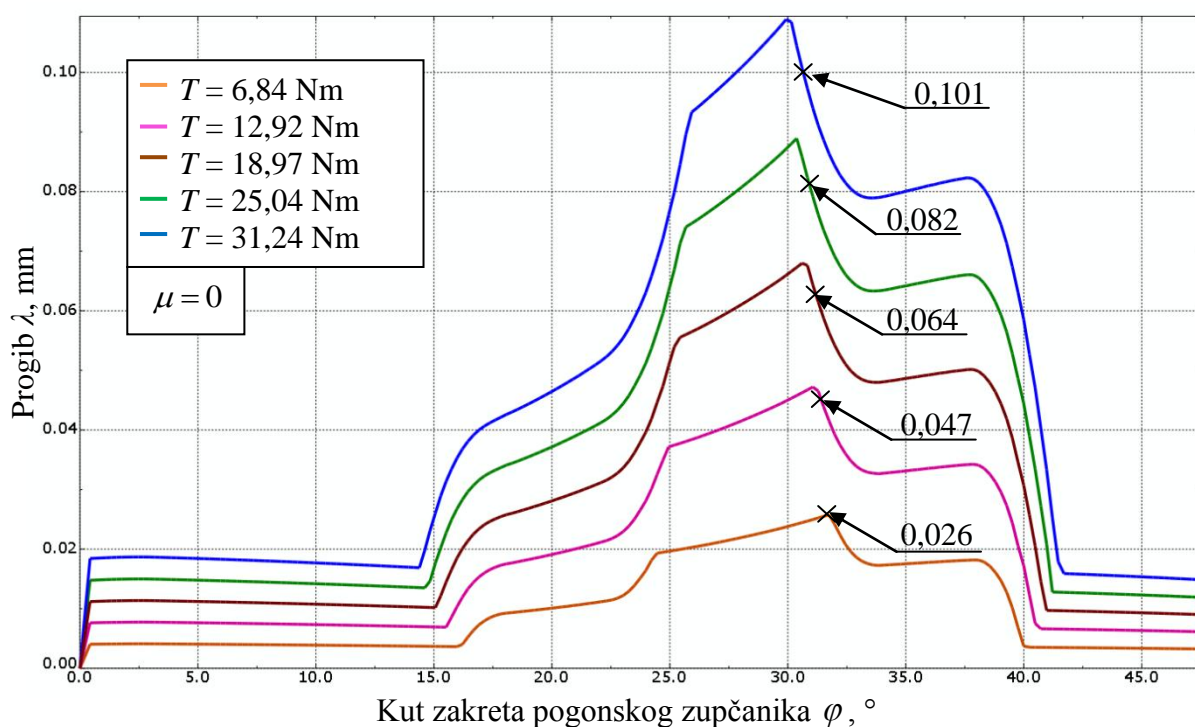
**Tablica 4. Rezultati ispitivanja pogonskog zupčanika**

Moment torzije $T$ , Nm	Maksimalan progib ispitivanog zuba $\lambda_{\max}$ , mm
6,84	0,034
12,92	0,055
18,97	0,073
25,04	0,087
31,24	0,101

Pri pojedinim opterećenjima zupčanicu nisu u istoj točki zahvata. Kako se događa rotacija s povećanjem opterećenja tako se javlja i ulazak u dvostruki zahvat što se može vidjeti na slici 53. Mora se naglasiti da provedeno ispitivanje ima svoje mane koje se mogu izbjeći samo sa promjenom načina ispitivanja. Rezultati koji su dobiveni su okvirni i služe za verifikaciju. Sukladno tome potrebno je prilagoditi očitavanje progiba u simulacijama iz poglavlja 2. Slijedi usporedba ispitivanja sa numeričkim analizama i analitičkim proračunom.

## 5. USPOREDBA REZULTATA

U ovom poglavlju provodi se usporedba svih dobivenih rezultata. Kako bi se verificirali numerički modeli potrebno je usporediti rezultate numeričkih analiza s rezultatima ispitivanja. Uspoređena je simulacija prolaska zuba kroz zahvat bez trenja s ispitivanjem. Očitavanja rezultata ispitivanja ukazuju na to da se uslijed rotacije mijenja točka zahvata zupčanika. Kako bi se što bolje izvršila usporedba rezultata, potrebno je uzeti u obzir rotaciju zupčanika i promjenu točke zahvata. Očitavanja su prikazana na slici 54.



**Slika 54. Očitavanje progiba simulacije prolaska zuba zupčanika kroz zahvat bez trenja**

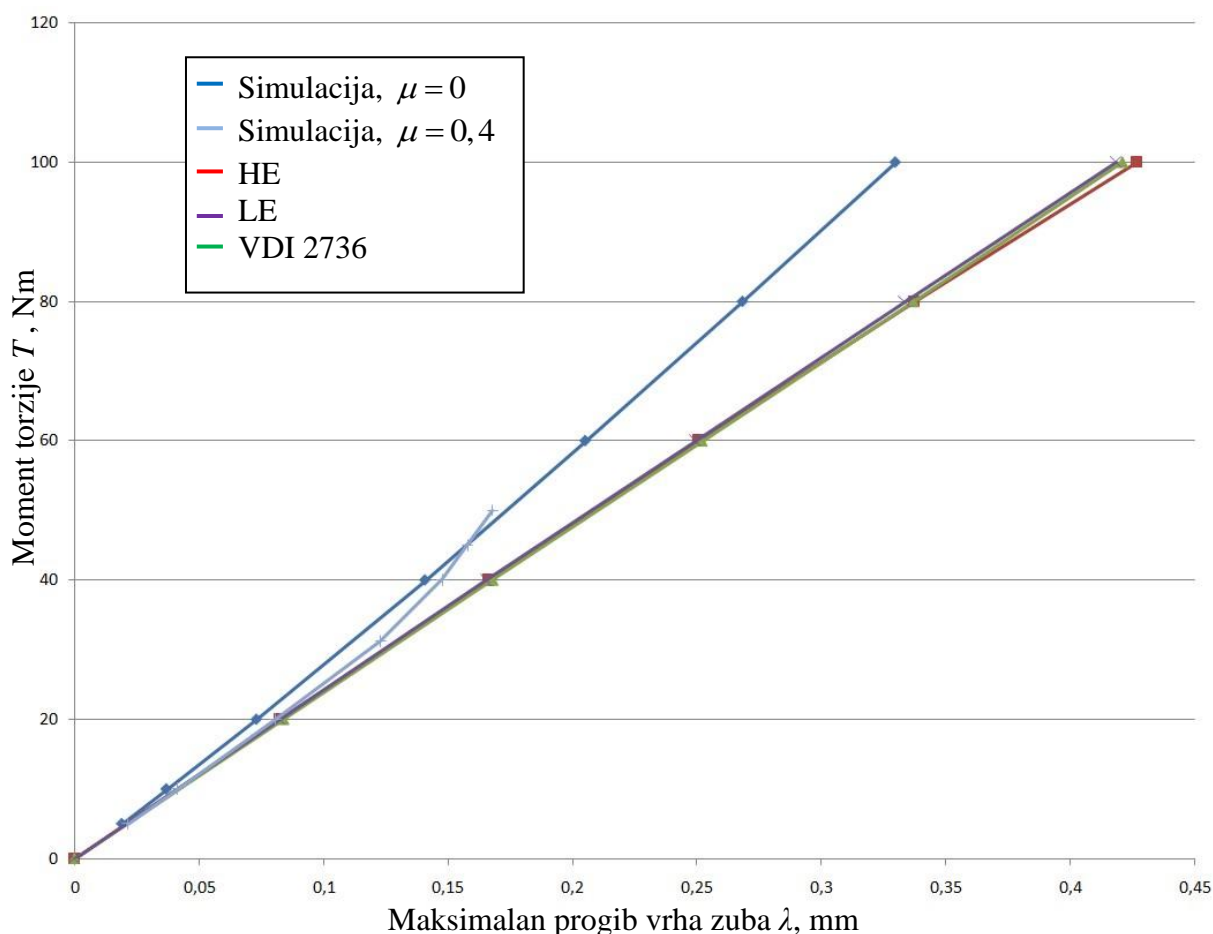
Progib pri najnižem opterećenju je očitao u točki D, a ostali progibi su očitani u dvostrukom zahvatu kao što se može i vidjeti sa slike. Tablica 5 prikazuje usporedbu progiba iz ispitivanja i progiba iz simulacije prolaska zuba zupčanika kroz zahvat bez trenja.

**Tablica 5. Usporedba progiba ispitivanja i simulacije bez trenja**

Moment torzije $T$ , Nm	Progib $\lambda$ , mm	
	Ispitivanje	Simulacija, $\mu = 0$
6,84	0,034	0,026
12,92	0,055	0,047
18,97	0,073	0,064
25,04	0,087	0,082
31,24	0,101	0,101



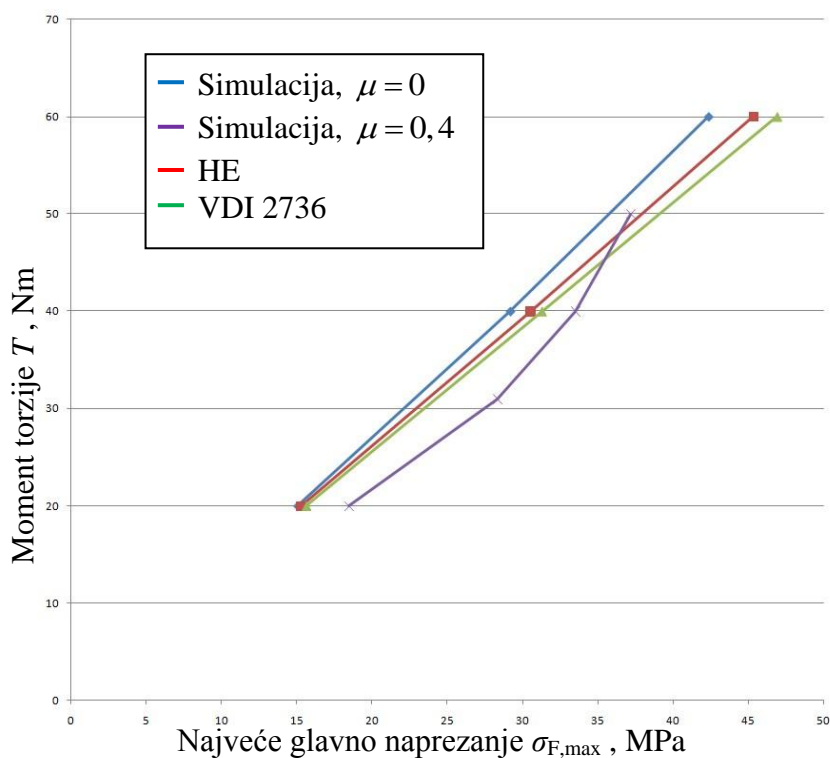
Razlike u rezultatima su male. Odstupanja su podjednaka pri svim opterećenjima osim pri opterećenju od 31,24 Nm gdje su rezultati jednaki. Može se reći da numerički model dobro opisuje ponašanje progiba zuba zupčanika. Predloženi numerički model koji je verificiran provedenim ispitivanjem se uspoređuje sa ostalim numeričkim modelima i smjernicom VDI 2736. Izvršena je usporedba maksimalnih progiba vrha zuba svih provedenih numeričkih analiza i smjernice VDI 2736. Na slici 55 prikazane su sve navedene analize u dijagramu progiba vrha zuba ovisnom o opterećenju.



**Slika 55. Usporedba maksimalnih progiba provedenih analiza**

Prvo što se može primjetiti na slici je da su analize jednostrukog zahvata koncentriranom silom s linearno elastičnim modelom i hiperelastičnim modelom podjednake. Razlike pri malim opterećenjima su zanemarive. Međutim, vidi se da se razlika povećava s rastom opterećenja što je svojstvo hiperelastičnog ponašanja materijala. Analiza jednostrukog zahvata koncentriranom silom prati krivulju VDI 2736 koja predstavlja analitički proračun progiba smjernicom VDI 2736. Jednostavnija numerička analiza u kojoj je jedan cijeli zupčanik zamijenjen koncentriranom silom i računa se samo u jednoj točki zahvata prikazuje

jednaka rješenja kao smjernica VDI 2736. Simulacija prolaska zuba kroz zahvat bez trenja u kojoj nije zamijenjen gonjeni zupčanik koncentriranom silom i u kojoj je uračunata rotacija pokazuje odstupanja od jednostavnije analize i VDI 2736 smjernice. Verificirana simulacija pokazuje manje progibe od VDI 2736 smjernice. Dodatno, s povećanjem opterećenja raste razlika između simulacije bez trenja i VDI 2736 smjernice. Krivulje linearno elastičnog modela i VDI 2736 imaju oblik pravca dok se kod simulacije bez trenja nagib krivulje povećava. Upravo taj nagib označava usporavanje rasta progiba uslijed porasta opterećenja. Iduće što se može primjetiti na slici je razlika između simulacije bez trenja i sa trenjem. Progib je veći u simulaciji sa trenjem sve do opterećenja od 45 Nm, nakon kojeg je progib manji. Simulaciji bez trenja se rast naglo usporava pri povećanim opterećenjima zbog pojave najvećeg glavnog naprezanja u dvostrukom zahvatu. Pri opterećenju od 40 Nm u simulaciji s trenjem najveće glavno naprezanje se javlja točno prilikom ulaska zuba u dvostruki zahvat. Iz slike 55 se može primjetiti da numeričke analize simulacija bez i sa trenjem imaju podjednak oblik. Pri manjim opterećenjima sve analize daju podjednake rezultate, međutim pri povećanju opterećenja javljaju se odstupanja kod simulacija sa i bez trenja. Odstupanja koja se javljaju u provedenim analizama i VDI 2736 smjernici analiziraju se i u dijagramu najvećih glavnih naprezanja prikazana na slici 56.



Slika 56. Usporedba naprezanja provedenih analiza

Kako se može vidjeti i iz dijagrama usporedbe maksimalnih progiba, tako se i na ovoj slici vidi da hiperealstični model najbolje prati VDI 2736 smjernicu. Kod simulacija s i bez trenja se javlja otklon u odnosu na VDI 2736 smjernicu. Simulacije pokazuju manja najveća glavna naprezanja. Simulacija s trenjem ima veća najveća glavna naprezanja od simulacije bez trenja, međutim pri povećanim opterećenjima se ta razlika smanjuje. Tablica 6 prikazuje usporedbu najvećih glavnih naprezanja u ovisnosti o opterećenju za analize na slici 56.

**Tablica 6. Usporedba najvećih glavnih naprezanja u korijenu zuba provedenih analiza**

	Analiza zahvata zubiju zupčanika uslijed rotacije			
Moment torzije $T$ , Nm	Bez trenja	S trenjem	HE	VDI 2736
20	15,06 MPa	18,48 MPa	15,3 MPa	15,15 MPa
40	29,19 MPa	33,51 MPa	30,54 MPa	31,27 MPa

Iz tablice 6 kao i iz slike 56 se vidi da HE analiza najbolje opisuje smjernicu. Razlika u analizama sa trenjem i bez trenja se povećava sve do opterećenja od 40 Nm, nakon kojeg se najveće glavno naprezanje kod analize sa trenjem pojavljuje u dvostrukom zahvatu što ima za posljedicu usporavanja rasta naprezanja i smanjivanja razlike između analize bez trenja. Usporedba simulacije prolaska zuba kroz zahvat bez trenja i VDI 2736 smjernice detaljnije je prikazana u tablici 7.

**Tablica 7. Usporedba rezultata simulacije prolaska zuba kroz zahvat bez trenja i VDI 2736**

		Moment torzije $T$ , Nm
		20
Simulacija prolaska zuba kroz zahvat bez trenja	Najveće glavno naprezanje $\sigma_{F,max}$ , MPa	15,06
	Kontaktno naprezanje $\sigma_H$ , MPa	28,9
	Maksimalan progib vrha zuba $\lambda_{max}$ , mm	0,073
VDI 2736	naprezanje $\sigma_F$ , MPa	15,15
	Kontaktno naprezanje $\sigma_H$ , MPa	28,32
	Progib vrha zuba $\lambda$ , mm	0,084

Numerički model simulacije prolaska zuba kroz zahvat bez trenja pokazuje manja najveća glavna naprezanja, veća kontaktna naprezanja i manji maksimalan progib vrha zuba od VDI 2736 smjernica.

## 6. ZAKLJUČAK

U ovom radu predloženi su numerički modeli koji opisuju ponašanje polimernih zupčanika. Numeričke analize koje su predložene su analiza jednostrukog zahvata koncentriranom silom i simulacija prolaska zuba kroz zahvat. Analiza jednostrukog zahvata koncentriranom silom sadrži dvije podanalize, materijal definiran kao linearno elastičan i kao hiperelastičan. Simulacija prolaska zuba kroz zahvat također sadrži dvije analize, bez trenja i s trenjem. Proveden je analitički proračun VDI 2736 smjernicom i provedeno je laboratorijsko ispitivanje zupčanika.

U analizi s hiperelastičnim materijalom progibi i deformacije koje se javljaju uslijed opterećenja su veće nego u analizi s linearno elastičnim ponašanjem materijala. Analize jednostrukog zahvata koncentriranom silom vrlo dobro opisuju smjernicu VDI 2736. Razlika u maksimalnim progibima vrha zuba je zanemariva. Simulacija bez trenja verificirana je laboratorijskim ispitivanjem. Progibi analizirani u ispitivanju podudaraju se s progibima u simulaciji bez trenja. Razlike su male, stoga se može zaključiti da simulacija dobro opisuje ponašanje zupčanika. Trend porasta najvećih glavnih naprezanja simulacija je različit od VDI 2736 smjernice. Rast najvećih glavnih naprezanja, pa tako i maksimalnih progiba vrha zubi se uspoređuje s povećanjem opterećenja. Uslijed trenda uspoređivanja, odstupanja od VDI 2736 rastu s porastom opterećenja.

Prilikom izrade polimernih zupčanika preporuča se VDI 2736 smjernica. Progibi i naprezanja koje smjernica pokazuje su veći nego što pokazuje simulacija, tako da ako bi se željelo optimirati preporuča se upotreba numeričkog modela simulacije kako bi se što bolje opisalo ponašanje zupčanika. Međutim, nedostaci kod simulacija su ti što je trenje pretpostavljeno kao konstantno i nije uzet utjecaj dodatnih dinamičkih efekata. Za daljnja istraživanja preporuča se odabir različitih materijala kako bi se mogla vidjeti svojstva pojedinih u eksploataciji. Preporuča se promatranje utjecaja temperature na progibe i naprezanja pri povećanim opterećenjima.

## LITERATURA

- [1] DuPont: Engineering Polymers for High Performance Gears, SAD, 2007.
- [2] Sorić, J.: Metoda konačnih elemenata, Golden marketing - Tehnička knjiga, Zagreb 2004.
- [3] Oberšmit, E.: Ozubljenja i zupčanici, SNL Zagreb 1982.
- [4] <http://qtcgears.com/products/prodimgs/spur/KPS.jpg>
- [5] <http://www.ridderflex.nl/wp-content/uploads/Polyamide-6.6-zwart.pdf>
- [6] [http://solidmechanics.org/Text/Chapter3\\_5/Chapter3\\_5.php](http://solidmechanics.org/Text/Chapter3_5/Chapter3_5.php)
- [7] <http://www.materialdatacenter.com/ms/en/tradenames/zytel/DuPont+Engineering+Polymers/Zytel%C2%AE+101+NC010/84f2fe69/839>
- [8] ABAQUS 6.12, Dassault Systemes, Simulia, 2012.
- [9] KiSSsoft, KiSSsoft AG, 2014.
- [10] Abaqus 6.13 Documentation, Dassault Systems, Simulia, 2012
- [11] Zafošnik, B.: Deflection Analysis of Spur Polymer Gear Teeth, Journal of Multidisciplinary Engineering Science and Technology, Vol.2 Issue 4, 2015.
- [12] van Melick, H.: Tooth-Bending Effects in Plastic Spur Gears, Gear technology, 2007.
- [13] VDI 2736, "Termoplastische Zahnräder", 2016.
- [14] <https://www.dantecdynamics.com/measurement-principles-of-dic>
- [15] Domitran, Z.: Utjecaj odstupanja dimenzija na životni vijek Polimernih zupčanika, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2013.
- [16] GOM Correlate, GOM, 2017.
- [17] [http://www.ambro-sol.com/images/stories/virtuemart/product/Vernice%20acrilica\\_1.jpg](http://www.ambro-sol.com/images/stories/virtuemart/product/Vernice%20acrilica_1.jpg)
- [18] J.R.: Gear Materials, Properties, and Manufacture, ASM International, 2005.
- [19] Boiadjev, Witzig, Tobie, Stahl: Tooth Flank Fracture- Basic Principles and Calculation Model for a Sub-Surface-Initiated Fatigue Failure Mode of Case-Hardened Gears, Gear Technology, 2015.
- [20] <http://qtcgears.com/products/spurgears.php>
- [21] Pine, H. S.: Organska kemija, Školska knjiga, Zagreb, 1994.
- [22] Čular, I.: Ciklus naprezanja u korijenu zuba cilindričnog zupčanika s tankim vijencem, Zagreb, 2016.

- [23] Podrug, S.: Prilog problematici integriteta zupčanika s obzirom na čvrstoću korijena zuba, Split 2004
- [24] Vučković, K.: Nastanak zamorne pukotine u korijenu zuba zupčanika s tankim vijencem, Zagreb 2009.
- [25] Litvin, F.L.: Development of Gear Technology and Theory of Gearing, Chicago, Illinois, SAD
- [26] Tharmakulasingam, R.: Transmission Error in Spur Gears: Static and Dynamic Finite-Element Modeling and Design Optimization, UK, 2009

## **PRILOZI**

### **I. CD-R disc**